

Felipe Emmanuel Ferreira de Castro

*Motor de Indução Trifásico Sem Mancais  
com Bobinado Dividido: otimização do  
sistema de posicionamento radial*

Natal

17 de dezembro de 2004

Felipe Emmanuel Ferreira de Castro

*Motor de Indução Trifásico Sem Mancais  
com Bobinado Dividido: otimização do  
sistema de posicionamento radial*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, no Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre.

Orientador:

Andres Ortiz Salazar

Co-orientador:

André Laurindo Maitelli

Natal

17 de dezembro de 2004

Felipe Emmanuel Ferreira de Castro

*Motor de Indução Trifásico Sem Mancais  
com Bobinado Dividido: otimização do  
sistema de posicionamento radial*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, no Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre e aprovada pela banca examinadora composta pelos professores:

---

Dr. Andres Ortiz Salazar (UFRN)  
Orientador

---

Dr. André Laurindo Maitelli (UFRN)  
Co-orientador

---

Dr. Ricardo Lúcio de Araújo Ribeiro (UFRN)  
Membro da banca

---

Dr. Cícero Marcos Tavares Cruz (UFC)  
Membro da banca

Natal, 17 de dezembro de 2004

# *Agradecimentos*

Agradeço a Deus e aos amigos que contribuíram em ação ou em pensamento, espiritual ou materialmente para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço a:

Meus avós, Ione e Joca, que muito ajudaram em minha educação;

Minha mãe, pela ajuda sobre a normatização, além da dedicação e carinho;

Meu pai, que também muito contribuiu para minha formação;

Meu orientador, que me apoiou sempre com entusiasmo e ao mesmo tempo rigor científico sobre novas idéias;

Meu co-orientador, com seu crivo apurado e valioso;

Atual equipe da base de pesquisa sobre máquinas sem mancais: Jossana, Jean, Stella, Álvaro e Cleiton;

Prof. Ricardo Ribeiro, com suas sugestões de última hora;

TRANSNOR Comércio e Ind. Ltda., pela construção do protótipo;

CNPQ, pelo apoio à pesquisa;

FSF (Free Software Foundation), fundação responsável pela manutenção de programas de computador livres;

## *Resumo*

Esta dissertação trata do sistema de controle de suspensão magnética ativa do rotor de um motor de indução sem mancais na configuração com bobinado dividido. Analisa um modelo dinâmico para as forças magnéticas radiais atuantes sobre o rotor. A partir disso, propõe um novo esquema de composição das correntes impostas ao estator da máquina. Mostra os testes realizados sobre um protótipo, provando a utilidade da nova estrutura de atuação para o controle de posição radial. Por fim, indica a importância de se adaptar esta estrutura a técnicas de controle rotacional consagradas, dando continuidade ao desenvolvimento da pesquisa sobre este tipo de equipamento, que é realizada na Universidade Federal do Rio Grande do Norte desde 2000.

Palavras-chave: motor, indução, sem mancais, bobinado dividido, levitação.

# *Abstract*

This dissertation deals with the active magnetic suspension control system of an induction bearingless motor configured with split windings. It analyses a dynamic model for the radial magnetic forces actuating on the rotor. From that, it proposes a new approach for the composition of the currents imposed to the machine's stator. It shows the tests accomplished with a prototype, proving the usefulness of the new actuating structure for the radial positioning control. Finally, it points out the importance of adapting this structure to well-known rotational control techniques, continuing this kind of equipment research, which is carried out at Federal University of Rio Grande do Norte since 2000.

Keywords: motor, induction, bearingless, split windings, levitation.

# *Sumário*

<b>Lista de Figuras</b>	p. ix
<b>Lista de Tabelas</b>	p. xii
<b>Lista de Símbolos</b>	p. xiii
<b>1 Introdução</b>	p. 1
<b>2 Visão Geral do Sistema</b>	p. 4
2.1 Caracterização do protótipo . . . . .	p. 4
2.2 Configuração do estator . . . . .	p. 5
2.3 Princípio de obtenção das forças radiais . . . . .	p. 6
2.4 Configuração do rotor . . . . .	p. 8
2.5 Necessidade da transformação rotacional para a aplicação dos sinais de controle de posição . . . . .	p. 10
2.6 Diagrama do sistema de controle . . . . .	p. 12
2.7 Processamento para o controle . . . . .	p. 13
<b>3 Força Magnética Radial</b>	p. 14
3.1 Equações gerais . . . . .	p. 15
3.2 Resultado para a força magnética radial aproximada . . . . .	p. 19
<b>4 Modelagem</b>	p. 22
4.1 Correntes no estator . . . . .	p. 22
4.1.1 Função de transferência . . . . .	p. 22

4.1.2	Discretização . . . . .	p. 24
4.1.3	Equação de estado . . . . .	p. 25
4.2	Posição radial do rotor . . . . .	p. 25
4.2.1	Análise da força magnética radial . . . . .	p. 25
4.2.1.1	Separação entre as componentes de torque e de posicionamento radial . . . . .	p. 26
4.2.1.2	Transformação de atuação da força radial . . . . .	p. 27
4.2.1.3	Corrente de levitação magnética . . . . .	p. 29
4.2.1.4	Influência de pequenos deslocamentos do rotor sobre a força resultante . . . . .	p. 30
4.2.2	Equação dinâmica . . . . .	p. 31
4.2.3	Função de transferência . . . . .	p. 33
4.2.4	Discretização . . . . .	p. 34
4.2.5	Influência da corrente de magnetização sobre a estabilização do sistema . . . . .	p. 35
4.2.6	Equação de estado . . . . .	p. 35
<b>5</b>	<b>Controle</b> . . . . .	p. 37
5.1	Correntes no estator . . . . .	p. 37
5.2	Posição radial do rotor . . . . .	p. 38
5.2.1	Análise . . . . .	p. 39
5.2.2	Otimização . . . . .	p. 40
5.2.3	Simulação . . . . .	p. 41
<b>6</b>	<b>Implementação</b> . . . . .	p. 44
6.1	Componentes físicos . . . . .	p. 44
6.1.1	Realinhamento dos sensores de posição . . . . .	p. 48
6.2	Algoritmos para os sistemas de controle . . . . .	p. 49

6.2.1	Organização . . . . .	p. 50
6.2.2	Comando e inicialização . . . . .	p. 52
6.2.3	Tarefas auxiliares . . . . .	p. 53
6.2.4	Controle de posição . . . . .	p. 53
6.2.5	Controle de correntes . . . . .	p. 55
<b>7</b>	<b>Resultados Experimentais</b>	p. 56
7.1	Correntes no estator . . . . .	p. 56
7.2	Posição radial do rotor . . . . .	p. 58
7.2.1	Resposta ao degrau . . . . .	p. 59
7.2.2	Área de dispersão do posicionamento . . . . .	p. 60
7.2.3	Desbalanceamento das correntes . . . . .	p. 64
7.2.4	Potência de controle radial . . . . .	p. 66
7.2.5	Conclusões . . . . .	p. 68
<b>8</b>	<b>Perspectivas de Desenvolvimento</b>	p. 70
	<b>Referências</b>	p. 71
	<b>Apêndice A – Estrutura do Motor de Indução Sem Mancais</b>	p. 73
A.1	Estrutura mecânica . . . . .	p. 73
A.2	Momento de inércia do rotor em relação aos pontos de sustentação . . . . .	p. 73
A.3	Esquema de ligação dos circuitos rotóricos . . . . .	p. 78
	<b>Apêndice B – Medição de parâmetros</b>	p. 79
B.1	Sistema de controle de correntes . . . . .	p. 79
B.1.1	Indutâncias próprias das bobinas do estator . . . . .	p. 79
B.1.2	Resistências das bobinas do estator . . . . .	p. 80
B.1.3	Função de transferência dos sensores de corrente . . . . .	p. 80

B.1.4	Tensão contínua do barramento do inversor . . . . .	p. 81
B.2	Sistema de controle de posição . . . . .	p. 82
B.2.1	Constante $K$ . . . . .	p. 82
B.2.2	Constantes $K_1$ e $K_2$ . . . . .	p. 83
B.2.3	Constantes $K_3$ e $K_4$ . . . . .	p. 83
B.2.4	Função de transferência dos sensores de posição . . . . .	p. 83
<b>Apêndice C – Cálculo da Matriz de Indutâncias</b>		p. 85
C.1	Função espessura do entreferro . . . . .	p. 85
C.2	Função corrente envolvida . . . . .	p. 87
C.3	Função potencial magnético escalar (fmm) . . . . .	p. 88
C.4	Função campo magnético . . . . .	p. 91
C.5	Função fluxo magnético concatenado . . . . .	p. 91
C.5.1	Fluxos próprios . . . . .	p. 92
C.5.2	Fluxos mútuos . . . . .	p. 93
C.6	Matriz de indutâncias . . . . .	p. 97
C.6.1	Indutâncias próprias . . . . .	p. 97
C.6.2	Indutâncias mútuas . . . . .	p. 98
C.7	Simplificação da matriz de indutâncias . . . . .	p. 99

## *Lista de Figuras*

1	Graus de liberdade de movimentos do rotor . . . . .	p. 5
2	Disposição dos estatores e rotores dentro da máquina . . . . .	p. 5
3	Diferença entre a ligação convencional e a com bobinado dividido . . . . .	p. 6
4	Disposição dos grupos de bobinas no estator . . . . .	p. 6
5	Fluxo magnético devido a uma bobina . . . . .	p. 7
6	Fluxo magnético devido a duas bobinas opostas . . . . .	p. 7
7	Configuração de um dos circuitos do rotor . . . . .	p. 8
8	Circulação de correntes induzidas dentro do rotor . . . . .	p. 9
9	Indução no rotor devido ao aumento do fluxo magnético . . . . .	p. 9
10	Anulação das correntes no rotor frente à variação diferencial do fluxo magnético . . . . .	p. 10
11	Diagrama do sistema de controle de corrente e de posição radial . . . . .	p. 12
12	Distribuição aproximada dos enrolamentos no estator . . . . .	p. 16
13	Disposição de dois enrolamentos quaisquer $i$ e $j$ no motor . . . . .	p. 17
14	Percurso fechado para a aplicação da Lei de Ampère . . . . .	p. 18
15	Diagrama de blocos do sistema de controle de correntes no estator, em malha aberta . . . . .	p. 23
16	Diagrama de corpo livre para o rotor . . . . .	p. 31
17	Modelo para o controle de posição radial do rotor . . . . .	p. 33
18	Pólos do sistema em malha aberta em função da corrente de magnetização . . . . .	p. 35
19	Diagrama de blocos do sistema de controle de correntes no estator . . . . .	p. 37
20	Resposta ao degrau unitário para o sistema de controle de corrente . . . . .	p. 38

21	Lugar das raízes para o modelo de posição em realimentação unitária . . . . .	p. 39
22	Resposta ao degrau unitário para o controle de posição . . . . .	p. 43
23	Sinal de controle de posição para o degrau unitário . . . . .	p. 43
24	Diagrama de blocos elétrico . . . . .	p. 44
25	Retificador de potência . . . . .	p. 45
26	Inversor de potência . . . . .	p. 46
27	Desalinhamento angular entre o estator e os sensores de posição . . . . .	p. 48
28	Fluxograma do programa controlador do sistema . . . . .	p. 51
29	Diagrama temporal da distribuição das tarefas de controle . . . . .	p. 52
30	Resposta ao degrau para a corrente em uma das bobinas do estator. . . . .	p. 57
31	Onda senoidal de 60 Hz em uma das bobinas do estator . . . . .	p. 57
32	Limite mecânico imposto ao deslocamento lateral do rotor . . . . .	p. 58
33	Resposta a uma variação em degrau para o controle radial ao longo de X e Y . . . . .	p. 59
34	Influência entre os sistemas de controle de posição ao longo de X e Y . . . . .	p. 60
35	Área de dispersão do rotor para o campo fixo - rotor sem bobinas . . . . .	p. 61
36	Áreas de dispersão do rotor para acionamentos em 15 e 60 Hz . . . . .	p. 61
37	Deslocamentos radiais do rotor acionado em 60Hz . . . . .	p. 62
38	Deslocamentos radiais médios do rotor acionado em 60Hz . . . . .	p. 62
39	Espectro de freqüências dos deslocamentos radiais médios . . . . .	p. 63
40	Correntes no estator, acionamento a 60 Hz . . . . .	p. 64
41	Decomposição das correntes para o acionamento a 60 Hz . . . . .	p. 65
42	Correntes de controle de posição radial, na referência estacionária . . . . .	p. 66
43	Medição da potência de entrada do sistema . . . . .	p. 68
44	Estrutura mecânica do motor de indução sem mancais . . . . .	p. 74
45	Decomposição do rotor em pedaços cilíndricos . . . . .	p. 75

46	Esquema de ligações dos circuitos elétricos no rotor . . . . .	p. 78
47	Filtro passa-baixa na saída dos sensores de corrente . . . . .	p. 81
48	Filtro passa-baixa na saída dos sensores de posição . . . . .	p. 84
49	Diagrama para o cálculo de $g(\alpha, \beta, \theta)$ . . . . .	p. 85
50	Indutância própria da bobina 1, em função do deslocamento do rotor .	p. 99
51	Indutância mútua entre as bobinas 1 e 2, em função do deslocamento do rotor . . . . .	p. 100
52	Indutância mútua entre as bobinas 1 e 3, em função do deslocamento do rotor . . . . .	p. 100
53	Indutância mútua entre as bobinas 1 e 4, em função do deslocamento do rotor . . . . .	p. 101
54	Indutância mútua entre as bobinas 1 e 5, em função do deslocamento do rotor . . . . .	p. 101
55	Indutância mútua entre as bobinas 1 e 6, em função do deslocamento do rotor . . . . .	p. 102

## *Lista de Tabelas*

1	Potências dissipadas nos enrolamentos do estator . . . . .	p. 67
2	Potências dissipadas nos enrolamentos do estator, pelas correntes de magnetização . . . . .	p. 67
3	Medição da indutância dos enrolamentos do estator . . . . .	p. 80
4	Medição da resistência dos enrolamentos do estator . . . . .	p. 80
5	Medição do ganho dos sensores de corrente . . . . .	p. 80

## *Lista de Símbolos*

$F_\alpha, F_\beta$  determinam a força magnética resultante no rotor;

$W(\alpha, \beta, \mathbf{i})$  é a função co-energia magnética armazenada no entreferro do motor;

$\alpha, \beta$  definem a posição radial do rotor em relação ao centro da máquina;

$\mathbf{i}$  é o vetor das seis correntes aplicadas aos enrolamentos do estator;

$l_{ij}(\alpha, \beta) = L_{ij}$ , são as funções indutâncias próprias, quando  $i = j$ ; e são as funções indutâncias mútuas, quando  $i \neq j$ ;

$\lambda_{ij}(\alpha, \beta)$  é o fluxo concatenado pela  $i$ -ésima bobina do estator devido à corrente da  $j$ -ésima bobina;

$N_i$  é o número de espiras da  $i$ -ésima bobina do estator; como todos os enrolamentos são iguais,  $N_i = N$  para qualquer  $i$ ;

$\phi_{ij}(\alpha, \beta)$  é o fluxo concatenado por uma das espiras do  $i$ -ésimo enrolamento devido à corrente no  $j$ -ésimo enrolamento;

$\mu_0$  é a permeabilidade magnética do ar, cujo valor é praticamente igual à do vácuo;

$h$  é a altura do cilindro rotórico;

$r$  é o raio interno do estator, que é aproximadamente igual ao raio do rotor;

$a_i$  e  $b_i$  são os ângulos inicial e final que localizam a bobina  $i$ ;

$H_j(\alpha, \beta, \theta)$  é a função campo magnético no entreferro devido à corrente que circula no enrolamento  $j$ ;

$\theta$  é a coordenada angular do sistema de coordenadas cilíndricas, utilizada para definir algumas funções ao longo do entreferro;

$V_j(\alpha, \beta)$  é o potencial magnético escalar do rotor devido à corrente que circula no enrolamento  $j$  do estator; o ponto  $A$  é tomado como referência, onde o potencial é nulo;

$i_j(\theta)$  é a corrente de uma das espiras da bobina  $j$  que é envolvida por um percurso fechado  $\overrightarrow{ACFGA}$ ;

$g(\alpha, \beta, \theta)$  é espessura do entreferro no ângulo  $\theta$  devido ao deslocamento  $(\alpha, \beta)$  do rotor;

$K$  é uma constante que está definida pela eq. (C.61), p. 97;

$g_0$  é a espessura média do entreferro, definida na seção C.1, p. 85;

$V_{cc}$  é a tensão do barramento de tensão contínua do inversor (barramento CC);

$I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  são as correntes senoidais trifásicas aplicadas ao estator, responsáveis pelo torque da máquina;

$\Delta i_a$ ,  $\Delta i_b$  e  $\Delta i_c$  são as correntes de controle de posicionamento radial, responsáveis pela centralização do eixo do rotor;

$I_m$  é a amplitude das correntes senoidais no estator;

$f$  é a frequência elétrica de variação senoidal das correntes, em Hertz;

$t$  é o tempo decorrido, em segundos;

$\theta_e$  é o ângulo elétrico que define o estado do sistema fasorial de correntes;

$\Delta i_x$  é o sinal de controle aplicado sobre a direção X de deslocamento do rotor, a qual está alinhada com os enrolamentos da fase A do estator;

$\Delta i_y$  é o sinal de controle aplicado sobre a direção Y de deslocamento do rotor, que é perpendicular à direção X;

$\mathbf{T}_i$  é uma matriz de transformação inversa à matriz  $\mathbf{T}_d$ ;

$F_p$  é o peso do rotor aplicado a cada ponto de suspensão do eixo;

$m_r$  é a massa do rotor;

$g_t$  é a aceleração gravitacional da Terra;

$\overline{\Delta i_y}$  é a componente média da corrente para a suspensão magnética do rotor;

$l_1$  é o braço de alavanca entre o ponto de apoio e o de aplicação da força magnética;

$l_2$  é a extensão do braço de alavanca até o ponto de fixação dos sensores de posicionamento;

$I_r$  é o momento de inércia do rotor em relação ao eixo paralelo ao eixo X, passando pelo ponto de apoio, à direita na figura 16;

$\theta_\beta$  é o ângulo de deslocamento do rotor em relação ao ponto de apoio;

$\tau_\beta$  é o torque aplicado ao rotor em relação ao ponto de apoio;

$y_s$  é o deslocamento radial do ponto de sensoriamento, ao longo da direção Y;

$K_{pc}$  é o ganho da parte proporcional do controlador de corrente;

$K_{ic}$  é o ganho da parte integrativa do controlador de corrente;

$K_{pp}$  é o ganho da parte proporcional do controlador de posição;

$K_{dp}$  é o ganho da parte derivativa do controlador de posição;

$y(\infty)$  é o valor final da saída em resposta a um degrau unitário;

$e(k) = [y(\infty) - y(k)]$  é o erro entre o valor final e o valor atual da saída no instante  $k$ ;

$u(k)$  é o sinal de controle aplicado no instante  $k$ ;

$P_{te}$  são as perdas totais no cobre devidas às correntes de magnetização e de levitação combinadas;

$P_{me}$  são as perdas no cobre pelas correntes de magnetização;

$P_{le}$  são as perdas no cobre pelas correntes de levitação.

# 1 *Introdução*

Este trabalho descreve parte da pesquisa sobre motores elétricos de indução sem mancais desenvolvida na UFRN. Os motores de indução são os equipamentos elétricos rotativos mais versáteis e robustos usados na indústria moderna. Em algumas aplicações bem específicas é interessante eliminarem-se os mancais mecânicos que sustentam o rotor. A tecnologia de motores sem mancais é um ramo de pesquisa para aplicações que requerem velocidade rotacional incomum (acima de 3600 rpm), operação suave, sem ruído, livre de manutenção mecânica; bombeamento de fluidos em circuitos hermeticamente fechados, etc. Para isso já existe uma solução bem conhecida: os mancais magnéticos. Outro tipo de solução, que leva a um sistema mais compacto, é aquela dos motores sem mancais explícitos. Neste caso, a função de sustentação do rotor fica embutida: o mesmo campo magnético que produz torque também é usado na obtenção de forças laterais para fixar radialmente o rotor. Juntando-se a robustez de um motor de indução à peculiaridade dos motores sem mancais, chega-se à máquina de indução sem mancais.

Particularmente, as aplicações a que se destinam os mancais magnéticos ou as máquinas sem mancais são aquelas onde uma ou mais das seguintes condições devem ser satisfeitas:

1. O atrito entre as partes girante e fixa deve ser minimizado para se atingir rápidas rotações sem deterioração da eficiência;
2. Não pode haver a emissão de partículas contaminantes devido ao atrito mecânico de rolamentos comuns;
3. Necessidade de se isolar hermeticamente algum fluido a ser bombeado, evitando a contaminação do mesmo ou vazamento para fora;
4. Necessidade de se eliminar os sistemas de lubrificação a óleo para rolamentos mecânicos;

Com relação à configuração do estator, atualmente duas estruturas são usadas para as máquinas de indução sem mancais. A primeira é chamada de sistema com dois enrolamentos; a segunda é chamada de sistema com enrolamentos divididos (CHIBA; SALAZAR, 2000). A diferença entre as duas reside em como é controlada a distribuição do fluxo magnético dentro da máquina, de modo a se obter as forças de posicionamento radial. O sistema com dois enrolamentos foi o primeiro proposto (CHIBA; POWER; RAHMAN, 1991), onde é acrescentado um conjunto de enrolamentos que altera a distribuição do fluxo através de superposição magnética, produzindo as forças de posicionamento radiais, além do torque para a rotação. O segundo esquema proposto (SALAZAR; STEPHAN, 1993) divide os enrolamentos do estator em grupos opostos espacialmente e controla a distribuição do fluxo pelo desbalanço de correntes entre estes pares de grupos, ou seja, a soma das componentes de torque e força radial é efetuada previamente, antes de se aplicar as correntes aos enrolamentos do estator.

O sistema com enrolamentos divididos é o adotado na pesquisa aqui referida. Os primeiros trabalhos com esse tipo de sistema usaram um motor de quatro pólos bifásico, onde o enrolamento de uma das fases era dividido em quatro grupos, que eram dispostos simétrica e ortogonalmente entre si (SALAZAR; STEPHAN; DUNFORD, 1993). Mais tarde, surgiu a proposta de implementação com um motor de quatro pólos trifásico, onde cada uma das fases era separada em um par de grupos opostos, totalizando seis bobinas no estator (FERREIRA, 2002). A implementação desta última foi realizada com sucesso (SALAZAR; FERREIRA; CASTRO, 2003), tendo-se mostrado factível (FERREIRA et al., 2003). O esforço de otimização deste último sistema levou a algumas modificações sobre a estrutura de controle digital, a configuração do rotor e a estratégia de aplicação dos sinais de posicionamento radial. A maior contribuição desta dissertação de mestrado é descrever essas últimas alterações e mostrar o desempenho alcançado com elas.

Dentre os principais objetivos deste trabalho destacam-se, então, as otimizações realizadas sobre os seguintes itens:

**Modelagem da força magnética radial**, com o estudo dos parâmetros que mais influenciam na estabilidade do posicionamento radial do rotor;

**Atuação do posicionamento radial**, usando transformações rotacional e bifásica-trifásica adequadas, de modo a manter a amplitude da força magnética no rotor independente da posição do fluxo dentro da máquina;

**Implementação digital**, utilizando um processador de sinal digital (DSP - “Digital Sig-

nal Processor”) para alcançar uma velocidade de processamento adequada às exigentes tarefas de controle, aplicadas às várias malhas de realimentação (FERREIRA et al., 2003; PAIVA et al., 2003);

**Configuração do rotor**, com circuitos de 4 pólos para minimizar a reação rotórica à variação do fluxo magnético de posicionamento (CHIBA et al., 1996), permitindo a obtenção de maiores forças radiais;

O primeiro e o segundo itens baseiam-se na metodologia de modelagem usada para o sistema com dois enrolamentos (CHIBA; POWER; RAHMAN, 1991; CHIBA et al., 1994; RAHMAN; FUKAO; CHIBA, 1995; CHIBA et al., 1996). O mesmo método pode ser aplicado para o sistema com enrolamentos divididos, eliminando a maior desvantagem que até então este apresentava: não era possível se fazer o controle radial para baixas frequências de acionamento do campo girante (CHIBA; SALAZAR, 2000). A nova estratégia de controle apresentada aqui estende a operação do motor até a velocidade nula de rotação.

A validação está baseada na experimentação sobre um protótipo. A parte inicial da dissertação descreve o sistema físico usado na pesquisa e a fundamentação teórica para as técnicas adotadas<sup>1</sup>. A organização do texto segue de acordo com as etapas clássicas de projeto de um sistema de controle: modelagem, análise, critérios de desempenho, simulação, implementação e verificação<sup>2</sup>. Por fim discutem-se os resultados com suas possíveis conseqüências e apresentam-se sugestões para a continuação da pesquisa.

---

<sup>1</sup>A referência Hayt Jr (1994) foi adotada como base teórica sobre eletromagnetismo; a ref. Schweitzer, Bleuler e Traxler (1994) como fundamentação sobre mancais magnéticos; e sobre máquinas elétricas foram consultados: El-Hawary (1986), Ong (1998).

<sup>2</sup>Sobre sistemas de controle as seguintes obras foram consultadas: D’azzo e Houpis (1978), Aström e Wittenmark (1990), Dorf (1986), Isermann (1989), Chen (1999).

## *2 Visão Geral do Sistema*

Um motor de indução sem mancais requer a sustentação de um corpo no espaço, o rotor, através do controle de forças magnéticas. Estas forças que atuam sobre o rotor podem ser de dois tipos: **forças de Lorentz**, que agem em direção tangencial à sua superfície cilíndrica e que aqui são usadas somente para gerar o torque que o rotaciona; **forças de relutância**, que agem em direção normal à sua superfície cilíndrica e são aproveitadas para posicioná-lo radialmente.

A força de relutância é derivada a partir da energia armazenada no campo magnético, a qual pode ser convertida em energia mecânica. Esta força sempre surge sobre a superfície de meios de diferentes permeabilidades magnéticas, como o ar e o ferro. E ela atua no sentido de diminuir a energia magnética armazenada. Nas próximas seções será mostrado como este tipo de força é empregado no sistema de estabilização da máquina de indução trifásica sem mancais.

### **2.1 Caracterização do protótipo**

O motor aqui empregado baseia-se em um protótipo anterior mais simples, que já demonstrara a viabilidade de se implementar a função de mancal implícito na máquina trifásica com bobinado dividido (FERREIRA, 2002). No novo protótipo, o eixo longitudinal é mantido na direção horizontal. São duas máquinas fixadas e alinhadas com o eixo principal de rotação, possibilitando assim a levitação do rotor por dois pontos de sustentação. Os estatores fixam-se à base através de um cilindro em comum e os rotores são montados em um eixo único.

Para se fixar o rotor no espaço, é necessário controlar seus seis graus de liberdade. Um deles é a própria rotação em torno do eixo principal, cujo controle não está considerado neste trabalho. Outro grau de liberdade diz respeito ao movimento axial do rotor. Este também não será levado em consideração aqui, assumindo-se que o próprio campo magnético da máquina tende a manter o rotor dentro do estator. Sobram quatro graus de

liberdade: dois para cada extremidade do rotor, compondo movimentos radiais, os quais são sensorizados e limitados mecanicamente.

A fig. 1 mostra todas estas possibilidades de movimentação de um eixo, destacando os que serão controlados:  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$  e  $y_2$ .

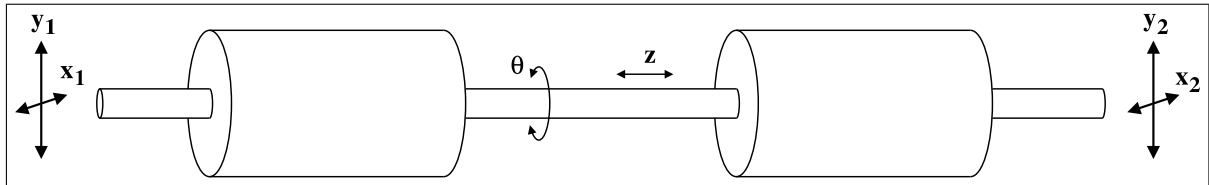


Figura 1: Graus de liberdade de movimentos do rotor

A figura 2 mostra um corte vertical sobre o protótipo, detalhando as disposições dos dois estatores e rotores. Não estão mostrados os enrolamentos de cobre, somente a estrutura simplificada do motor. Basicamente, o sistema funciona como dois motores acoplados mecanicamente por um eixo em comum. Para simplificar a análise, somente uma das extremidades deste protótipo será levada em consideração, assumindo-se que o outro lado funciona como um mancal de apoio que restringe os outros dois graus de liberdade do deslocamento radial.

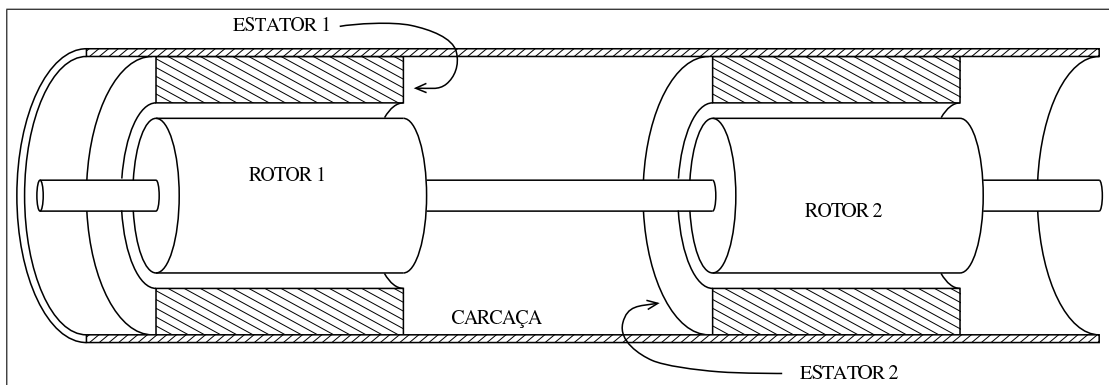


Figura 2: Disposição dos estatores e rotores dentro da máquina

## 2.2 Configuração do estator

O esquema de ligação de cada estator é trifásico de quatro pólos, na configuração de pólos consecuentes. Ou seja, só existem dois grupos de bobinas para cada fase, totalizando seis grupos, distribuídos ao longo de 36 ranhuras. E cada grupo é formado por três bobinas, dispostas concêntricamente. A figura 3 mostra como os seis grupos são ligados para acionar o motor.

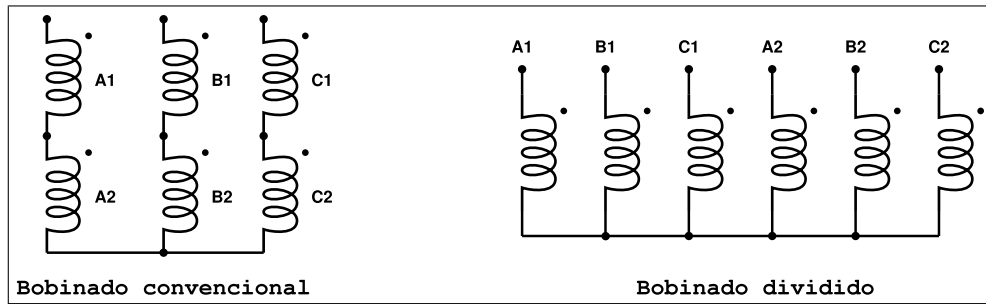


Figura 3: Diferença entre a ligação convencional e a com bobinado dividido

Nesta ligação, a única diferença com relação àquela de um motor convencional é que os pares de grupos opostos não são ligados em série. Ao invés disso, dividem-se estes pares, alimentando cada um independentemente. Daí o motivo para o nome desta configuração: com bobinado dividido.

## 2.3 Princípio de obtenção das forças radiais

Para se entender a configuração das forças radiais que atuam sobre o rotor deve-se visualizar a distribuição do fluxo magnético internamente. A disposição dos enrolamentos dentro do estator está esquematizada na figura 4, por um corte transversal sobre a máquina.

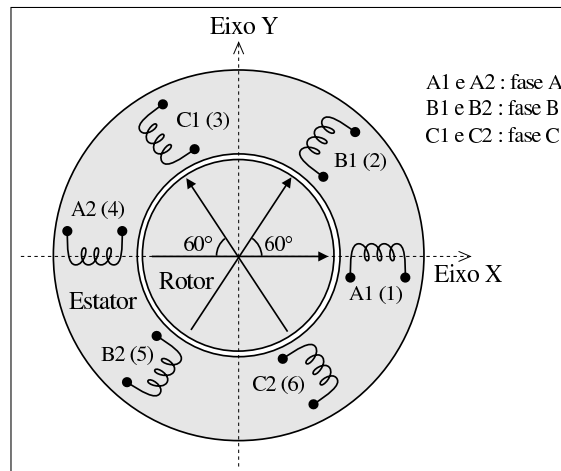


Figura 4: Disposição dos grupos de bobinas no estator

Alimentando-se somente a bobina A1, tem-se uma configuração de fluxo representada aproximadamente na figura 5. Somente uma linha de fluxo está desenhada, indicando genericamente o caminho preferencial.

Neste caso existe uma maior concentração de fluxo magnético na parte do entreferro mais à direita, resultando em uma força de atração neste sentido. Esta força tenta encostar

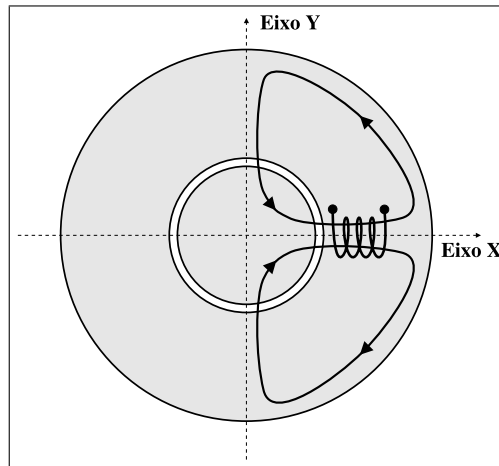


Figura 5: Fluxo magnético devido a uma bobina

o rotor ao estator porque facilita assim a passagem de fluxo pelo circuito magnético, acomodando o conjunto em um estado com menor energia magnética armazenada.

Alimentando-se também o grupo oposto, A2, a configuração do fluxo muda para aquela mostrada na figura 6.

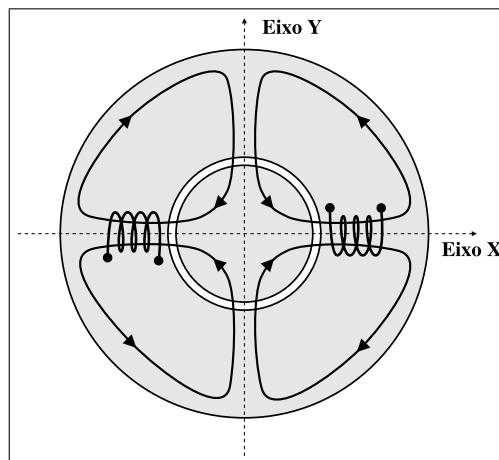


Figura 6: Fluxo magnético devido a duas bobinas opostas

Surge aqui uma componente de força para a esquerda, contrabalanceando a da direita. Se as correntes nas duas bobinas forem iguais, as duas forças opostas se anulam quando o rotor está perfeitamente no centro. No entanto, esta não é uma configuração estável: qualquer pequeno deslocamento para a direita faz a força neste sentido aumentar em relação à outra força; o mesmo acontece para qualquer movimento para a esquerda. Ou seja, a força magnética passiva atua quase sempre no sentido de fazer o rotor se aproximar do estator. Neste caso, somente o controle ativo desta força pode estabilizar o sistema.

Supondo que o rotor está exatamente no centro e as correntes nas duas bobinas

são iguais, para obter uma força para a esquerda, basta aumentar a corrente deste lado e diminuir do outro. Assim, a densidade de fluxo magnético fica maior na região de entreferro da esquerda e o rotor é atraído para lá. Através dessa atuação diferencial sobre as correntes que fluem pelas duas bobinas pode-se, então, gerar forças que estabilizem a posição do rotor no centro. Isso vale para qualquer par de bobinas opostas e a força obtida atua ao longo do eixo que passa pelo centro delas. Ou seja, pode-se controlar forças de posicionamento para qualquer direção do plano transversal, superpondo-se os efeitos ao longo dos três eixos de atuação, os quais estão representados na figura 4 pelas setas desenhadas dentro do rotor.

## 2.4 Configuração do rotor

O rotor utilizado é composto por circuitos elétricos fechados, os quais não se opõem à variação diferencial do fluxo magnético entre dois grupos opostos. A geometria de um destes circuitos está mostrada na figura 7. Por simplicidade, somente 4 das 48 ranhuras estão representadas, para indicar como cada um dos 12 circuitos fecham-se ao longo delas.

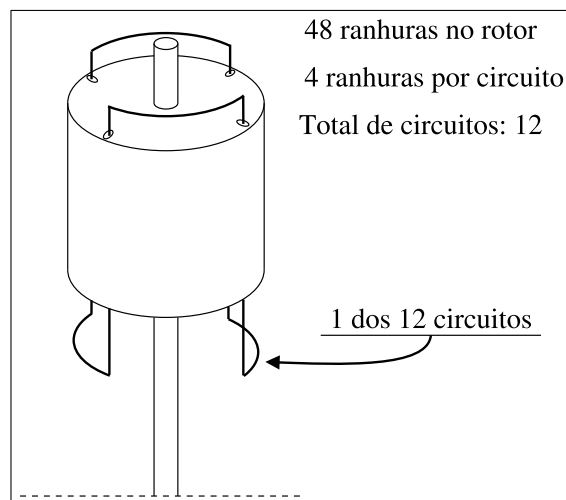


Figura 7: Configuração de um dos circuitos do rotor

A maneira como uma corrente induzida pode fluir em um destes circuitos está indicada através de um corte transversal no rotor. A figura 8 mostra que a corrente deve obedecer o percurso fechado que o circuito elétrico restringe dentro do rotor.

Na figura 9, o corte transversal no motor mostra como são induzidas correntes por causa da variação do fluxo magnético. Aqui, o sentido da corrente é tal que reage ao aumento do fluxo total na máquina, de acordo com a Lei de Lenz e com a “regra da mão direita”.

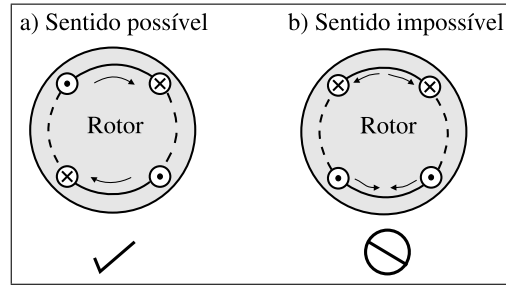


Figura 8: Circulação de correntes induzidas dentro do rotor

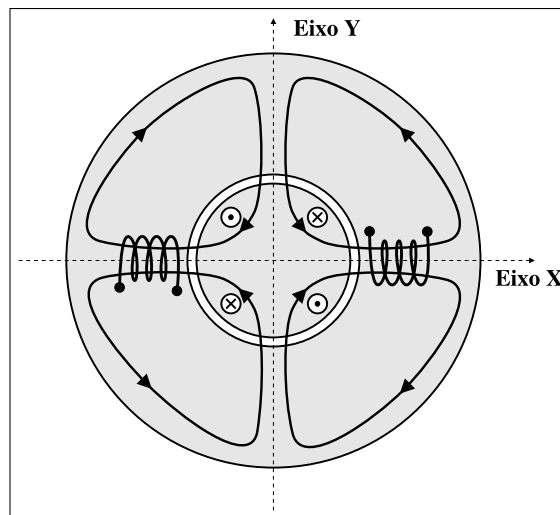


Figura 9: Indução no rotor devido ao aumento do fluxo magnético

No entanto, ao se modificar o fluxo de uma maneira diferencial em relação às duas regiões opostas no entreferro, não mais haverá indução sobre o circuito no rotor. A figura 10 mostra um exemplo de tal variação. O aumento na corrente do grupo da direita reflete um aumento no fluxo magnético deste lado. A linha de fluxo mais fina representa este aumento, com seu sentido sendo o mesmo do fluxo principal (efeito aditivo). O mesmo se dá para a diminuição da corrente sobre o lado esquerdo, com o sentido da linha fina sendo inverso ao da linha grossa (efeito subtrativo). O desenho indica duas correntes que fluem em sentidos opostos no mesmo circuito, o que seria absurdo (assim como na figura 8-b). E assim, conclui-se que a resultante de corrente no rotor é nula neste caso.

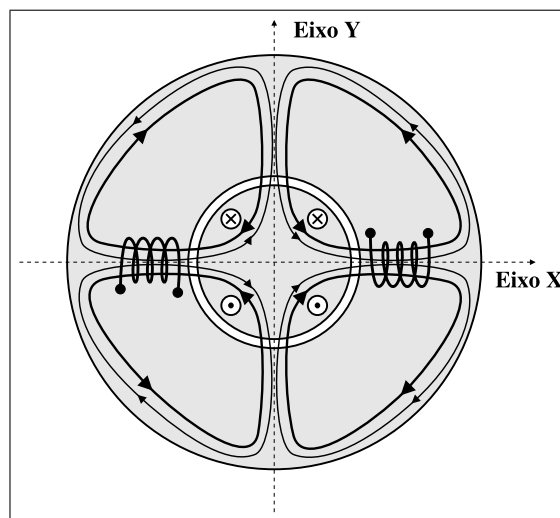


Figura 10: Anulação das correntes no rotor frente à variação diferencial do fluxo magnético

Esta configuração dos circuitos do rotor favorece o controle da distribuição do fluxo dentro da máquina, supondo-se a aplicação do modo de atuação diferencial descrito antes. Com isso a estabilização do sistema pode ser mais facilmente obtida, pois o fluxo de posicionamento radial atua rapidamente, sem a reação direta de correntes no rotor. As causas para a indução eletromagnética ficam restritas a: a rotação do fluxo magnético em relação ao rotor; a variação total da amplitude desse fluxo. Portanto, correntes induzidas que exercem algum efeito sobre o controle de posição radial só aparecem pela aplicação de torque de carga ao eixo da máquina.

## 2.5 Necessidade da transformação rotacional para a aplicação dos sinais de controle de posição

Para se acionar o motor, referências de correntes trifásicas devem ser impostas aos três pares de grupos de bobinas. As correntes que percorrem dois grupos opostos estão

em fase e alternam-se de acordo com a frequência de acionamento da máquina. Na seção 2.3 analisou-se o surgimento das forças radiais sem considerar a relação fasorial entre as correntes no estator. Se esta frequência for relativamente alta, próxima da nominal (60 Hz), isso não representa impedimento ao controle posicional simples (FERREIRA, 2002), pois aproveita-se a componente média da força pulsante gerada. No entanto, para frequências mais baixas isto se torna impossível, dado que a falta de controle durante os instantes de troca de polaridade prejudica muito a estabilização do sistema.

Esta falta de controle ocorre durante os momentos em que se anula a componente principal dos fluxos que passam pelas regiões do entreferro correspondentes a um par de bobinas opostas. Nestes instantes, a componente diferencial de corrente para gerar forças radiais cria concentrações de fluxos magnéticos de igual magnitude, mas com sentidos opostos (entrando no rotor de um lado e saindo dele do outro). E isso não contribui para definir uma força magnética útil, pois esta surge somente quando os valores absolutos dos fluxos opostos são desbalanceados. Para evitar este lapso, deve-se considerar a interação entre todas as fases, aproveitando-se a diferença de  $120^\circ$  entre elas e usando todas as três direções de atuação possíveis para gerar a força magnética sobre o rotor.

A partir da motivação anterior, busca-se uma maneira alternativa de se distribuir as componentes da força radial entre os três pares de bobinas opostas. No entanto, sabe-se que para se compor forças em um plano, somente duas direções são suficientes. Disso, conclui-se que existe um grau de liberdade para a solução encontrada, a qual consiste em se aplicar uma transformação sobre os dois sinais de controle posicionais que permita distribuir a força radial entre as três direções de atuação. Esta transformação deve fazer a força instantânea aplicada ao rotor seguir a referência comandada pelo controlador posicional, independentemente da configuração do fluxo magnético. Será mostrado que esta transformação é função do ângulo de acionamento trifásico e incorpora termos senoidais de uma matriz de transformação rotacional.

No sistema de motor sem mancais com dois enrolamentos, desde o início ficou claro a necessidade de se aplicar tal transformação rotacional aos sinais de posicionamento, de modo a se obter forças de atuação radial invariantes no tempo, dada uma referência de força fixa (CHIBA; POWER; RAHMAN, 1991). O mesmo desenvolvimento usado lá pode ser aplicado para o caso do sistema com bobinado dividido, o que será mostrado em detalhes nos capítulos 3 e 4.

## 2.6 Diagrama do sistema de controle

O sistema de controle para o protótipo descrito nas seções anteriores está mostrado esquematicamente na figura 11. Todas as variáveis contendo a letra  $i$  referem-se a correntes elétricas.

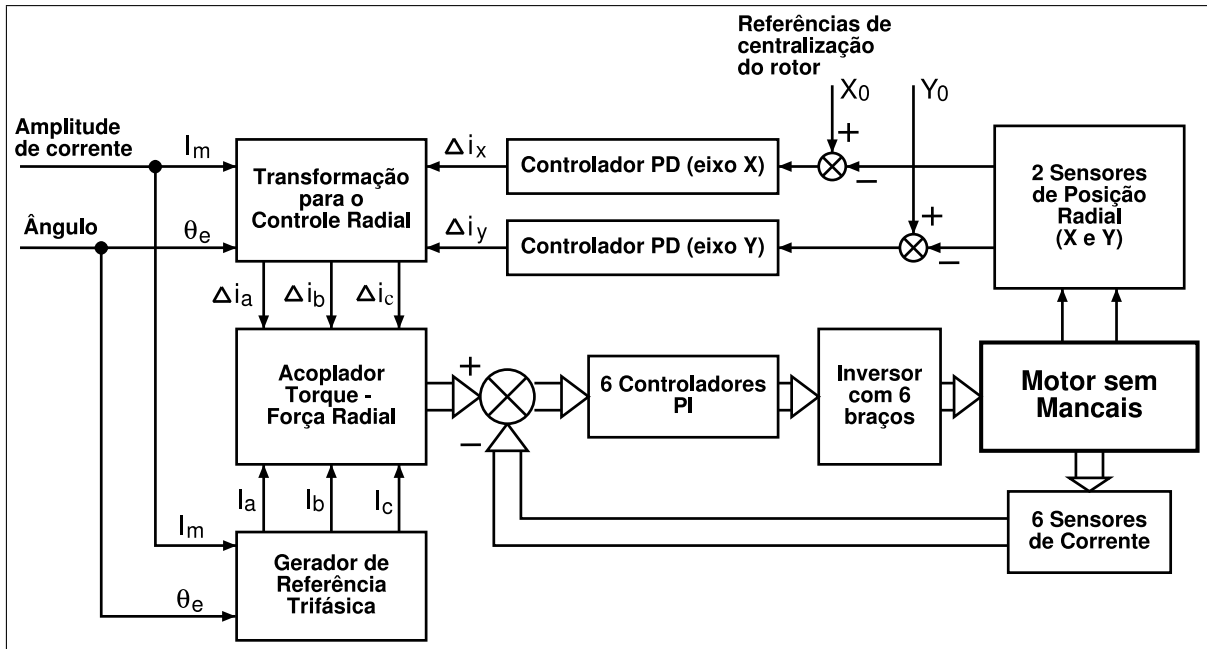


Figura 11: Diagrama do sistema de controle de corrente e de posição radial

O motor sem mancais recebe seis comandos de corrente para as bobinas do estator. Estas correntes são controladas com o uso amplificadores de potência chaveados (inversores com IGBT's - *Insulated Gate Bipolar Transistor*) e de sensores isolados eletricamente (por efeito Hall). As seis malhas de controle independentes para estas correntes são implementadas em um algoritmo dentro de um processador digital de sinais (DSP - *Digital Signal Processor*).

As referências para o controle das correntes elétricas são dadas pela combinação entre os comandos de torque e de força radial. Os comandos de torque são gerados pela variação do ângulo de referência de um sistema trifásico equilibrado, criando assim o efeito do campo magnético girante. O controle de torque e rotação ainda mantém-se em malha aberta. A referência trifásica é gerada através de uma tabela senoidal dentro do DSP.

A estabilização radial funciona através de dois controladores independentes que atuam sobre eixos ortogonais de sensoriamento. A atuação acontece através da transformação especial mencionada na seção anterior. Os sensores de posição radial baseiam-se em indução magnética de correntes em alta frequência e geram uma resposta linear.

## 2.7 Processamento para o controle

Pelo esquema da seção anterior, nota-se que toda a parte do sistema referente ao controle está concentrada em um dispositivo de processamento digital. Isto ajuda muito a tornar o conjunto mais compacto e ao mesmo tempo diminuir seu custo. O DSP é um dispositivo muito versátil e com boa velocidade de cálculo. Já é indispensável a muitas aplicações industriais, comerciais ou até mesmo domésticas. A máquina sem mancais certamente é uma de tais aplicações. Pois existem várias tarefas de controle a serem realizadas em um tempo muito restrito, da ordem de algumas centenas de microssegundos.

A incorporação de um grande número de periféricos para a entrada e saída de sinais facilita muito a implementação digital de controladores usando este dispositivo. O DSP usado para este sistema tem algumas características bem específicas ao acionamento de máquinas elétricas:

- Alta velocidade de processamento: frequência básica de 40 MHz para seu relógio;
- Palavras de dados de 16 bites;
- Aritmética em ponto fixo;
- Conversor analógico com 16 canais: tensão de entrada na faixa de 0 a 3,1 V e resolução em 10 bites;
- Gerenciador de eventos temporais versátil: 8 canais independentes com sinais modulados por largura de pulso (PWM - *Pulse Width Modulation*), necessários para chavear os inversores de potência;

O DSP deve tratar todas as tarefas no menor tempo possível para aumentar a rapidez de rejeição a perturbações (ruído térmico, vibrações mecânicas, pulsações da força magnética, etc) que prejudiquem a estabilização do rotor no centro da máquina. Uma correta distribuição de tempo de processamento e o sincronismo entre as tarefas é um fator muito importante para o bom funcionamento do sistema.

Para a implementação dos controladores mostrados na figura 11 é necessário obter um modelo para análise e ajuste dos parâmetros de controle, até que se chegue a um desempenho satisfatório. Isso está descrito nos capítulos 3, 4 e 5, a seguir.

### *3 Força Magnética Radial*

Aqui está demonstrado o cálculo da força magnética radial resultante no rotor em função das correntes nos enrolamentos do estator. Procura-se chegar a uma expressão simples para esta função. Para isso, as seguintes considerações são feitas:

- A permeabilidade magnética do ferro é muito maior que a do ar; pode-se, então, assumir que os potenciais magnéticos dentro do estator e rotor são constantes e que o campo magnético nestas regiões é insignificante em relação ao campo no entreferro; e além disso, despreza-se qualquer tipo de dissipação de energia no material ferromagnético (perdas no ferro);
- A influência do fluxo magnético disperso é insignificante em relação ao fluxo que passa diretamente através do entreferro, de modo que toda a energia magnética armazenada no sistema concentra-se nesta região;
- A distribuição de cada um dos seis enrolamentos pode ser aproximada por bobinas concentradas em pares de ranhuras “filamentares”; assume-se, então, que a parede interna do estator é completamente lisa, sem as reentrâncias das ranhuras reais;
- O rotor é um cilindro liso, sem ranhuras ou condutores de corrente elétrica; esta consideração restringe a análise para o caso em que o motor não está com nenhum carregamento de torque, ou seja, o escorregamento da máquina permanece pequeno e as correntes induzidas no rotor podem ser desprezadas;
- A dimensão média do entreferro é insignificante em relação ao raio externo do rotor ou ao raio interno do estator; esta consideração permite assumir que o campo magnético ao longo de linhas radiais através do entreferro é constante, ou seja, é possível utilizar a simetria cilíndrica para uma solução aproximada do problema.

A partir destas aproximações, a expressão para a força magnética será usada como base inicial para o projeto do controlador de posição radial do rotor.

### 3.1 Equações gerais

Da teoria da conversão eletromecânica de energia, tem-se

$$\begin{cases} F_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} W(\alpha, \beta, \mathbf{i}) \\ F_\beta = \frac{\partial}{\partial \beta} W(\alpha, \beta, \mathbf{i}) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde:

$F_\alpha, F_\beta$  determinam a força magnética resultante no rotor;

$W(\alpha, \beta, \mathbf{i})$  é a função co-energia magnética armazenada no entreferro do motor;

$\alpha, \beta$  definem a posição radial do rotor em relação ao centro da máquina (ver figura 13 adiante);

$\mathbf{i}$  é o vetor das seis correntes aplicadas aos enrolamentos do estator.

Para o caso linear, assumindo-se que o ferro está longe do estado de saturação, a co-energia  $W(\alpha, \beta, \mathbf{i})$  pode ser escrita como:

$$W(\alpha, \beta, \mathbf{i}) = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \cdot \mathbf{L}(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{i} \quad (3.2)$$

$\mathbf{L}(\alpha, \beta)$  é a matriz de indutâncias próprias e mútuas entre os seis enrolamentos do estator. Utilizando uma notação simplificada para os elementos desta matriz, tem-se:

$$\mathbf{L}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} l_{11}(\alpha, \beta) & l_{12}(\alpha, \beta) & \cdots & l_{16}(\alpha, \beta) \\ l_{21}(\alpha, \beta) & l_{22}(\alpha, \beta) & \cdots & l_{26}(\alpha, \beta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{61}(\alpha, \beta) & l_{62}(\alpha, \beta) & \cdots & l_{66}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{61} & L_{62} & \cdots & L_{66} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde:

$l_{ij}(\alpha, \beta) = L_{ij}$ , são as funções indutâncias próprias, quando  $i = j$ ; e são as funções indutâncias mútuas, quando  $i \neq j$ .

E a notação para as correntes no estator é:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_{a1}(t) \\ i_{b1}(t) \\ i_{c1}(t) \\ i_{a2}(t) \\ i_{b2}(t) \\ i_{c2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Substituindo (3.2) em (3.1), obtém-se:

$$\begin{cases} F_\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{L}(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{i} \\ F_\beta = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \mathbf{L}(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{i} \end{cases} \quad (3.5)$$

A figura 12 detalha a aproximação considerada para a distribuição dos enrolamentos no estator.

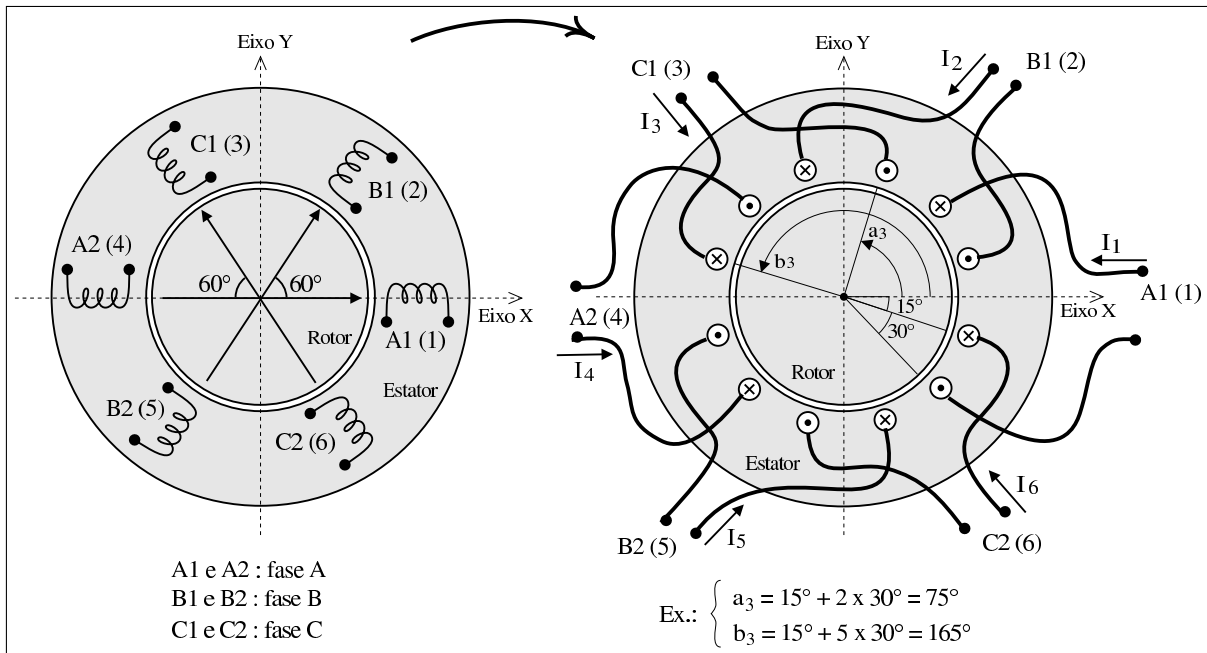


Figura 12: Distribuição aproximada dos enrolamentos no estator

E a figura 13 mostra um corte do motor visto através de seu eixo de rotação. Ela ajuda a entender a disposição dos enrolamentos do estator e as variáveis de integração utilizadas nas próximas equações.

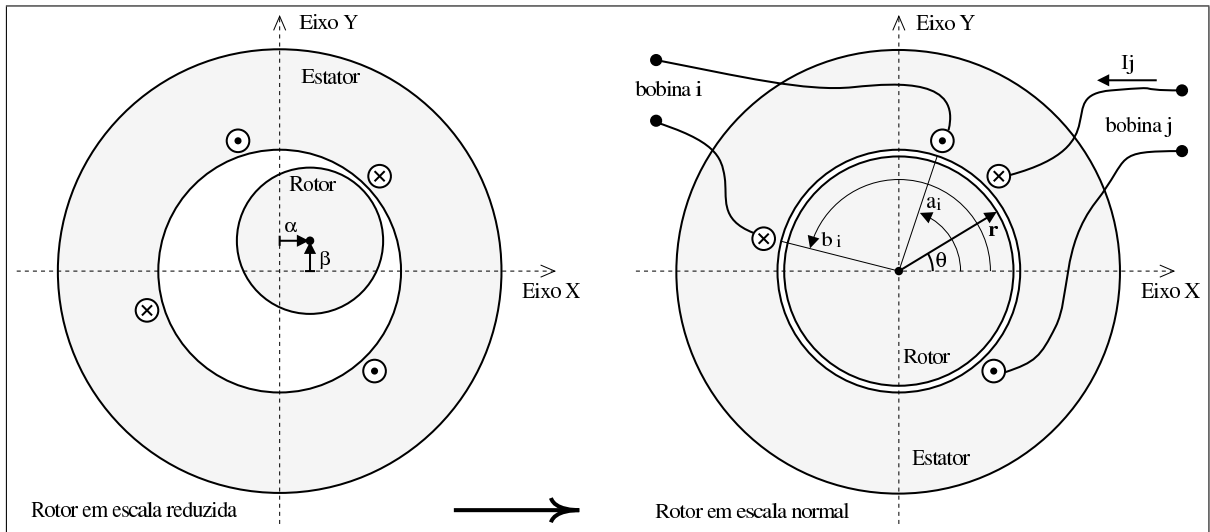


Figura 13: Disposição de dois enrolamentos quaisquer  $i$  e  $j$  no motor

Pela teoria dos campos magnetostáticos, a indutância própria de um circuito ou entre dois circuitos elétricos é calculada por:

$$L_{ij} = \frac{\lambda_{ij}(\alpha, \beta)}{I_j} = \frac{N_i \phi_{ij}(\alpha, \beta)}{I_j} = \frac{N \phi_{ij}(\alpha, \beta)}{I_j} \quad (3.6)$$

onde:

$\lambda_{ij}(\alpha, \beta)$  é o fluxo concatenado pela  $i$ -ésima bobina do estator devido à corrente da  $j$ -ésima bobina;

$N_i$  é o número de espiras da  $i$ -ésima bobina do estator; como todos os enrolamentos são iguais,  $N_i = N$  para qualquer  $i$ ;

$\phi_{ij}(\alpha, \beta)$  é o fluxo concatenado por uma das espiras do  $i$ -ésimo enrolamento devido à corrente no  $j$ -ésimo enrolamento.

Pela definição de fluxo magnético e pela simetria cilíndrica do problema, calcula-se:

$$\begin{aligned} \phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S (\mu_0 \vec{H}) \cdot (\vec{u}_r dA) = \mu_0 \int_S (\vec{H} \cdot \vec{u}_r) dA = \mu_0 \int_S H_r dA \quad \rightarrow \\ \phi &= \mu_0 \int H_r [h(r d\theta)] = \mu_0 h r \int H_r d\theta \quad \rightarrow \\ \phi_{ij}(\alpha, \beta) &= \mu_0 h r \int_{a_i}^{b_i} H_j(\alpha, \beta, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde:

$\mu_0$  é a permeabilidade magnética do ar, cujo valor é praticamente igual à do vácuo;

$h$  é a altura do cilindro rotórico;

$r$  é o raio interno do estator, que é aproximadamente igual ao raio do rotor;

$a_i$  e  $b_i$  são os ângulos inicial e final que localizam a bobina  $i$ ;

$H_j(\alpha, \beta, \theta)$  é a função campo magnético no entreferro devido à corrente que circula no enrolamento  $j$ ;

$\theta$  é a coordenada angular do sistema de coordenadas cilíndricas, utilizada para definir algumas funções ao longo do entreferro.

Convém ressaltar que o vetor campo magnético  $\vec{H}$ , de acordo com as considerações feitas inicialmente, só apresenta a componente radial,  $H_r = H_j(\alpha, \beta, \theta)$ , em coordenadas cilíndricas.

Na equação anterior,  $H_j(\alpha, \beta, \theta)$  é a função que precisa ser determinada para se calcular a integral. Para isso, aplicam-se a Lei Circuital de Ampère e a Lei de Gauss para o Magnetismo:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (3.8)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (3.9)$$

Para aplicar a Lei de Ampère, eq. (3.8), escolhe-se um percurso adequado, definido completamente pela variável  $\theta$ , assim como mostrado na figura 14.

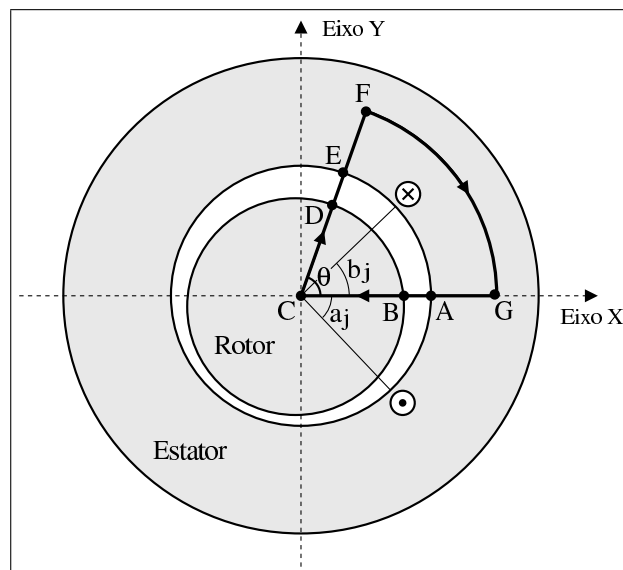


Figura 14: Percurso fechado para a aplicação da Lei de Ampère

Quando se percorre uma região dentro do estator ou do rotor o campo magnético é desprezível, só existindo contribuições significativas nos trechos através do entreferro. Portanto, as integrais ao longo dos caminhos  $\overrightarrow{BCD}$  e  $\overrightarrow{EFGA}$  são consideradas nulas. Tomando-se somente os percursos  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{DE}$ , o resultado a que se chega é

$$\begin{aligned}
\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_D^E \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{g(\alpha, \beta, 0)} H_j(\alpha, \beta, 0) dr + \int_{g(\alpha, \beta, \theta)}^0 H_j(\alpha, \beta, \theta) dr = \\
&= H_j(\alpha, \beta, 0) \int_0^{g(\alpha, \beta, 0)} dr - H_j(\alpha, \beta, \theta) \int_0^{g(\alpha, \beta, \theta)} dr = N_j i_j(\theta) \quad \rightarrow \\
H_j(\alpha, \beta, 0) g(\alpha, \beta, 0) - H_j(\alpha, \beta, \theta) g(\alpha, \beta, \theta) &= N_j i_j(\theta) \quad \rightarrow \\
V_j(\alpha, \beta) - H_j(\alpha, \beta, \theta) g(\alpha, \beta, \theta) &= N_j i_j(\theta) \quad \rightarrow \\
H_j(\alpha, \beta, \theta) &= \frac{V_j(\alpha, \beta) - N_j i_j(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

onde:

$V_j(\alpha, \beta)$  é o potencial magnético escalar do rotor devido à corrente que circula no enrolamento  $j$  do estator; o ponto  $A$  é tomado como referência, onde o potencial é nulo;

$i_j(\theta)$  é a corrente de uma das espiras da bobina  $j$  que é envolvida pelo percurso  $\overrightarrow{ACFGA}$ ;  $g(\alpha, \beta, \theta)$  é espessura do entreferro no ângulo  $\theta$  devido ao deslocamento  $(\alpha, \beta)$  do rotor; ou: é o tamanho do segmento de reta  $\overrightarrow{DE}$ , na figura 14.

A partir de agora devem ser calculadas todas as funções apresentadas, com substituições retroativas das mesmas até se chegar novamente à equação (3.5). O cálculo analítico da matriz de indutâncias da eq. (3.6) é bastante longo, mesmo com todas as simplificações adotadas. Por este motivo, omite-se seu detalhamento aqui, deixando-o sob a forma de apêndice, ao final desta dissertação (ver apêndice C). Uma alternativa que evitaria a aproximação analítica seria medir experimentalmente os valores das entradas dessa matriz de indutâncias. No entanto, este procedimento experimental não pôde ser adotado por falta de uma estrutura de medição apropriada sobre o motor.

## 3.2 Resultado para a força magnética radial aproximada

A partir do resultado analítico demonstrado no apêndice C, tomam-se as derivadas parciais da matriz de indutâncias simplificada, eq. (C.83), p. 104. Ao aplicá-las nas

equações do sistema (3.5) chega-se a:

$$F_\alpha \simeq \frac{K}{2g_0^2} \mathbf{i}^T \cdot \left( \mathbf{L}_\alpha + \frac{\mathbf{L}_{\alpha\alpha}}{g_0} \alpha + \frac{\mathbf{L}_{\alpha\beta}}{g_0} \beta \right) \cdot \mathbf{i} \quad (3.11)$$

$$F_\beta \simeq \frac{K}{2g_0^2} \mathbf{i}^T \cdot \left( \mathbf{L}_\beta + \frac{\mathbf{L}_{\beta\beta}}{g_0} \beta + \frac{\mathbf{L}_{\alpha\beta}}{g_0} \alpha \right) \cdot \mathbf{i} \quad (3.12)$$

onde:

$g_0$  é a espessura média do entreferro, definida na seção C.1, p. 85;

$K$  é uma constante que está definida pela eq. (C.61), p. 97.

$$\mathbf{L}_\alpha \simeq 0,555 \begin{bmatrix} 2 & -\frac{13}{56} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{56} \\ -\frac{13}{56} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{13}{56} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{13}{56} & -2 & \frac{13}{56} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{13}{56} & -1 & 0 \\ -\frac{13}{56} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{\alpha\alpha} \simeq \begin{bmatrix} 1,636 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,208 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,208 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,636 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,208 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,208 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{\alpha\beta} \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,247 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,247 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,247 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,247 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_\beta \simeq 0,555 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2-\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{2-\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} & -(2-\sqrt{3}) & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -(2-\sqrt{3}) & \sqrt{3} & -\frac{2-\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{2-\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{2-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{2-\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} & (2-\sqrt{3}) \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & (2-\sqrt{3}) & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{\beta\beta} \simeq \begin{bmatrix} 1,065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,493 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,493 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,065 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,493 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,493 \end{bmatrix}$$

As expressões (3.11) e (3.12) vêm da linearização de equações analíticas complexas obtidas no apêndice C. Foram aproximadas pela série de Maclaurin<sup>1</sup>, truncada nos termos de 2ª ordem. Com esta simplificação, um modelo para a dinâmica de deslocamento radial do rotor pode ser obtido mais facilmente, assim como visto no próximo capítulo.

---

<sup>1</sup>Granville, Smith e Longley (1992)

## 4 *Modelagem*

### 4.1 Correntes no estator

O acionamento do motor ocorre pela imposição de correntes elétricas independentes sobre os seis enrolamentos do estator. Isso facilita o controle de posição radial, pois a força magnética gerada relaciona-se diretamente a este conjunto de correntes elétricas. É necessário, então, definir e projetar o tipo de controlador para as correntes do estator. Os requisitos da imposição de correntes relacionam-se com o tempo de resposta aos sinais de referência.

Para se projetar esses controladores, estuda-se um modelo matemático baseado na impedância das bobinas do estator, pois admite-se que as correntes que fluem nelas não apresentam influências significativas entre si. E ainda, cada enrolamento pode ser tratado como um sistema isolado, bastando modelar um deles e aplicar o mesmo resultado para os outros. Além disso, admite-se que as correntes induzidas no rotor também não causam grandes perturbações no valor das indutâncias, para efeito de controle das correntes do estator. Esta abordagem facilita bastante a implementação desta parte.

A seguir, adota-se a descrição entrada-saída para esta modelagem, buscando-se obter uma função de transferência (F.T.) em malha aberta que seja simples.

#### 4.1.1 Função de transferência

O diagrama de blocos para o sistema de controle de corrente em malha aberta está mostrado na figura 15. Por ele fica claro como estão acopladas as diversas partes desse sistema, faltando ainda fechar o laço de realimentação com uma compensação em cascata.

Analisa-se primeiro o comportamento da bobina do estator sobre o qual se quer impor uma determinada corrente elétrica. É adotado o modelo simples de uma indutância em

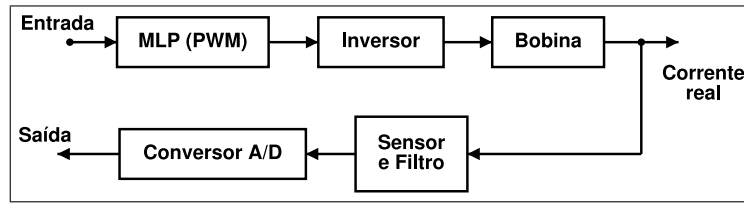


Figura 15: Diagrama de blocos do sistema de controle de correntes no estator, em malha aberta

série com uma resistência. A variável de entrada é a tensão aplicada sobre o enrolamento e a de saída é a corrente que flui por ele. Portanto, a função de transferência buscada é sua admitância no domínio da Transformada de Laplace:

$$G_c(s) = \frac{1}{Z_e(s)} = \frac{1}{sL_e + R_e}$$

Os valores da indutância e da resistência das bobinas do estator foram medidas através de métodos bastante simples (ver apêndice B):

$$\begin{cases} L_e \simeq 0,112 \text{ H} \\ R_e \simeq 1,903 \Omega \end{cases}$$

Sendo assim, fica-se com:

$$G_c(s) \simeq \frac{8,929}{s + 16,964}$$

Na implementação de qualquer controlador digital, faz-se necessária a filtragem dos sinais sensoriados, de modo a evitar os efeitos de sobreposição de frequências. Para isso, são suficientes filtros passa-baixa analógicos de primeira ordem. A função de transferência dos sensores de corrente e seus filtros está dada abaixo (ver apêndice B):

$$H_c(s) = \frac{V_c(s)}{I_b(s)} \simeq \frac{0,2052}{\frac{s}{5119} + 1} \simeq \frac{1050}{s + 5119} \quad (4.1)$$

A escolha da frequência de corte desse filtro relaciona-se com o período de amostragem dos sinais de corrente. Para não haver batimento de frequências, a teoria de Nyquist exige o seguinte: a largura de banda dos sinais amostrados deve ser pelo menos 2 vezes menor que a frequência de amostragem.

Na etapa de conversão analógico-digital, os limites da tensão analógica de entrada são 0 e 3,1 V. E a resolução da codificação digital é de 10 bites, compondo uma escala de 1024 passos discretos na representação numérica binária. Isto afeta a F.T. do sensor de

corrente pela aplicação de um ganho dado por:

$$K_{ad} = \frac{1024 \text{ “passos”}}{3,1 \text{ V}} \simeq 330,3 \quad (4.2)$$

Já na etapa de conversão digital-analógico, o sinal de controle é o ciclo de trabalho para o inversor de potência. A resolução do modulador por largura de pulso (MLP) foi configurada em 1500 passos discretos, correspondentes à variação do ciclo de trabalho entre os valores 0 e 1. Isto implica em um ganho igual a:

$$K_{mlp} = \frac{1}{1500 \text{ “passos”}} \simeq 6,667 \cdot 10^{-4}$$

O inversor de potência também é responsável pela aplicação de outro ganho ao sinal de controle. Da teoria de eletrônica de potência, o ganho de um inversor do tipo *Buck* é dado por:

$$K_{inv} = V_{cc} \rightarrow K_{inv} \simeq 200$$

onde:

$V_{cc}$  é a tensão do barramento de tensão contínua do inversor (barramento CC).

Fazendo-se a multiplicação em cascata dos blocos descritos, obtém-se a F.T. em malha aberta para o controle de corrente:

$$\begin{aligned} GH_c(s) &= K_{mlp} \cdot K_{inv} \cdot G_c(s) \cdot H_c(s) \cdot K_{ad} \rightarrow \\ GH_c(s) &\simeq \frac{4,129 \cdot 10^5}{(s + 16,964)(s + 5119)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

### 4.1.2 Discretização

A partir do modelo contínuo, aplica-se a taxa de amostragem para se chegar ao modelo discretizado através de um segurador de ordem zero<sup>1</sup>. O período de amostragem para o controle de corrente,  $T_a$ , foi fixado a partir da configuração do algoritmo de controle (ver capítulo 6). A taxa mais rápida obtida foi  $f_a = 2,667$  kHz, que corresponde a um período de amostragem igual a:

$$T_a = 375 \mu s$$

---

<sup>1</sup>Aström e Wittenmark (1990)

Usando este valor, o modelo fica assim:

$$GH_c(z) \simeq \frac{0,0167612(z + 0,535076)}{(z - 0,993659)(z - 0,146662)} \quad (4.4)$$

### 4.1.3 Equação de estado

Uma possível representação da função de transferência em malha aberta da seção anterior sob a forma de equação de estado é obtida pela realização canônica controlável:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1,14032 & -0,145732 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0,0167612 & 0,00896851 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.5)$$

De posse deste modelo simplificado, pode-se simular o sistema realimentado com um compensador em cascata e ajustar parâmetros para otimizar o tempo de resposta das correntes no estator. Ao se representar o sistema diretamente sob a forma matricial, reduz-se o tempo de processamento computacional para sua simulação.

## 4.2 Posição radial do rotor

Para se projetar o controlador de posicionamento radial deve-se partir de um modelo apropriado para o deslocamento do rotor. Procura-se chegar a um equilíbrio entre simplificação e exatidão. Estas são características que se contrapõem na obtenção de qualquer modelo matemático de um dado sistema físico. O nível de simplificação usado aqui é o suficiente para se obter um modelo linear que permita a aplicação de técnicas de controle clássicas, já bem conhecidas.

### 4.2.1 Análise da força magnética radial

A primeiro passo para se chegar ao modelo matemático consiste em se obter a força magnética que atua no rotor em função das variações moduladas sobre as correntes do estator. A parte inicial desse cálculo foi desenvolvido no capítulo 3. Chegou-se a uma expressão aproximada para a força magnética em função das correntes dos seis enrolamentos do estator. A partir de agora, procura-se decompor estas correntes em função de variáveis diretamente relacionadas às duas forças ortogonais para o posicionamento radial:  $F_\alpha$  e  $F_\beta$ .

#### 4.2.1.1 Separação entre as componentes de torque e de posicionamento radial

Como visto no capítulo 2, as correntes de posicionamento são superpostas sobre as correntes trifásicas do estator e o resultado é enviado como referência para os controladores de corrente (figura 11, p. 12). O vetor dessas correntes de referência pode ser escrito como:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a + \Delta i_a \\ I_b + \Delta i_b \\ I_c + \Delta i_c \\ I_a - \Delta i_a \\ I_b - \Delta i_b \\ I_c - \Delta i_c \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

onde:

$I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  são as correntes senoidais trifásicas aplicadas ao estator, responsáveis pelo torque da máquina;

$\Delta i_a$ ,  $\Delta i_b$  e  $\Delta i_c$  são as correntes de controle de posicionamento radial, responsáveis pela centralização do eixo do rotor.

Assim fica caracterizado o modo diferencial de atuação de bobinas opostas em um sistema de levitação magnética (SCHWEITZER; BLEULER; TRAXLER, 1994). A posição oposta das bobinas do estator pode ser verificada pela figura 4, p. 6.

E a referência trifásica para as correntes é definida por:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \sin(2\pi ft) \\ I_m \sin(2\pi ft - \frac{2\pi}{3}) \\ I_m \sin(2\pi ft + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \sin(\theta_e) \\ I_m \sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) \\ I_m \sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

onde:

$I_m$  é a amplitude das correntes senoidais no estator;

$f$  é a frequência elétrica de variação senoidal das correntes, em Hertz;

$t$  é o tempo decorrido, em segundos;

$\theta_e$  é o ângulo elétrico que define o estado do sistema fasorial de correntes.

A variação do ângulo  $\theta_e$  cria o efeito de campo magnético girante dentro do motor, que por sua vez gera um torque no eixo pela reação contra as correntes induzidas no rotor.

#### 4.2.1.2 Transformação de atuação da força radial

Para se obterem forças de atuação independentes da posição do campo, analisa-se a força magnética para o caso onde o rotor está centralizado, assumindo-se que esta é a situação usual de funcionamento do sistema. Para isso, basta fazer  $\alpha = \beta = 0$  nas equações (3.11) e (3.12). Assim, as expressões para a força sobre o rotor são reescritas:

$$F_\alpha \simeq K_1 \mathbf{i}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & -\frac{13}{14} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{14} \\ -\frac{13}{14} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{13}{14} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{13}{14} & -2 & \frac{13}{14} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{13}{14} & -1 & 0 \\ -\frac{13}{14} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{i}$$

$$F_\beta \simeq K_1 \mathbf{i}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2-\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{2-\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} & -(2-\sqrt{3}) & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -(2-\sqrt{3}) & \sqrt{3} & -\frac{2-\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{2-\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{2-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{2-\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} & (2-\sqrt{3}) \\ \frac{2-\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & (2-\sqrt{3}) & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{i}$$

onde a constante  $K_1$  é usada para compactar as equações:

$$K_1 = \frac{0,555 K}{2 g_0^2} \quad (4.8)$$

Aplicando-se as definições (4.7) e (4.6), obtém-se o seguinte resultado para a força magnética radial:

$$\begin{bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{bmatrix} \simeq K_1 \mathbf{T}_d \begin{bmatrix} \Delta i_a \\ \Delta i_b \\ \Delta i_c \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde  $\mathbf{T}_d$  é chamada de matriz de transformação direta:

$$\mathbf{T}_d = 4 I_m \begin{bmatrix} \frac{24}{7} \sin \theta_e & -\left(\frac{3}{7} \sin \theta_e + \sqrt{3} \cos \theta_e\right) & \left(\frac{3}{7} \sin \theta_e - \sqrt{3} \cos \theta_e\right) \\ \left(\sqrt{3} - 3\right) \cos \theta_e & -\sqrt{3} (\sin \theta_e + \cos \theta_e) & -\sqrt{3} (\sin \theta_e - \cos \theta_e) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Neste ponto cabe aplicar uma transformação que relacione os sinais de controle  $\Delta i_a$ ,  $\Delta i_b$  e  $\Delta i_c$  aos sinais de controle nas direções dos sensores de posicionamento,  $\Delta i_x$  e  $\Delta i_y$ . O rotor tem apenas dois graus de liberdade para se deslocar radialmente. Portanto, basta um

par de variáveis de controle para posicioná-lo. No conjunto  $\{\Delta i_a, \Delta i_b, \Delta i_c\}$ , uma das três pode ser eliminada sem afetar a controlabilidade do sistema. A seguinte transformação é, então, definida:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_a \\ \Delta i_b \\ \Delta i_c \end{bmatrix} = \mathbf{T}_i \begin{bmatrix} \Delta i_x \\ \Delta i_y \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

onde:

$\Delta i_x$  é o sinal de controle aplicado sobre a direção X de deslocamento do rotor, a qual está alinhada com os enrolamentos da fase A do estator;

$\Delta i_y$  é o sinal de controle aplicado sobre a direção Y de deslocamento do rotor, que é perpendicular à direção X;

$\mathbf{T}_i$  é uma matriz de transformação proporcional à inversa da matriz  $\mathbf{T}_d$

Substituindo-se isto na eq. (4.9), tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{bmatrix} \simeq K_1 \underbrace{\mathbf{T}_d \mathbf{T}_i}_{k^* \mathbf{I}_{2 \times 2}} \begin{bmatrix} \Delta i_x \\ \Delta i_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{bmatrix} \simeq K_1 k^* \begin{bmatrix} \Delta i_x \\ \Delta i_y \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

E assim mostra-se que as duas variáveis de controle  $\Delta i_x$  e  $\Delta i_y$  são diretamente proporcionais às componentes ortogonais da força radial que atua sobre o rotor. Falta agora especificar a matriz de transformação proporcional inversa  $\mathbf{T}_i$ . Pela definição

$$\mathbf{T}_d \mathbf{T}_i = k^* \mathbf{I}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} k^* & 0 \\ 0 & k^* \end{bmatrix}$$

pode-se demonstrar que:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i &= \begin{bmatrix} \sin \theta_e & \sin (\theta_e - 90^\circ) \\ \sin (\theta_e - 60^\circ) & \sin (\theta_e - 150^\circ) \\ \sin (\theta_e - 120^\circ) & \sin (\theta_e + 150^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_e & -\cos \theta_e \\ \frac{\sin \theta_e - \sqrt{3}(\cos \theta_e)}{2} & -\frac{\sqrt{3}(\sin \theta_e) + \cos \theta_e}{2} \\ -\frac{\sin \theta_e + \sqrt{3}(\cos \theta_e)}{2} & -\frac{\sqrt{3}(\sin \theta_e) - \cos \theta_e}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \\ \mathbf{T}_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_e & -\cos \theta_e \\ -\cos \theta_e & -\sin \theta_e \end{bmatrix} \quad (4.13) \end{aligned}$$

Com isso, o valor de  $k^*$  fica definido:

$$\mathbf{T}_d \mathbf{T}_i = k^* \mathbf{I}_{2 \times 2} = (12 I_m) \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad \rightarrow \quad k^* = 12 I_m$$

E finalmente a equação (4.12) para a força de atuação pode ser expressa assim:

$$\begin{bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{bmatrix} \simeq 12 K_1 I_m \begin{bmatrix} \Delta i_x \\ \Delta i_y \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

#### 4.2.1.3 Corrente de levitação magnética

Tendo-se medido a massa do rotor, calcula-se a força peso que deve ser anulada pela suspensão ativa do rotor. Assumindo-se a simetria perfeita entre os dois extremos do rotor, garante-se que o peso é igualmente distribuído entre os dois pontos de apoio:

$$F_p = \frac{m_r g_t}{2}$$

onde:

$F_p$  é o peso do rotor aplicado a cada ponto de suspensão do eixo;

$m_r$  é a massa do rotor;

$g_t$  é a aceleração gravitacional da Terra.

De acordo com a disposição dos sensores de posição, esta força atua somente ao longo da direção Y de controle, na vertical. Portanto, só a componente  $F_\beta$  deve atuar em reação ao peso:

$$\begin{aligned} F_p = \bar{F}_\beta \quad \rightarrow \quad \frac{m_r g_t}{2} = 12 K_1 I_m \bar{\Delta i}_y \quad \rightarrow \\ \bar{\Delta i}_y = \frac{m_r g_t}{24 K_1 I_m} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aqui as barras sobre os termos  $\bar{F}_\beta$  e  $\bar{\Delta i}_y$  são usadas para enfatizar a componente média da força de controle que deve atuar em contraposição ao peso constante. Portanto:

$\bar{\Delta i}_y$  é a componente média da corrente para a suspensão magnética do rotor.

Ela está diretamente relacionada com as perdas de levitação, assim como indicado no capítulo 7.

#### 4.2.1.4 Influência de pequenos deslocamentos do rotor sobre a força resultante

Aplicando-se as definições (4.6), (4.7), (4.11) e (4.13) nas eqs. (3.11) e (3.12) chega-se ao caso mais geral, onde o rotor pode sofrer pequenos deslocamentos em torno do centro. As equações da força ficam assim:

$$\begin{cases} F_\alpha \simeq 12K_1 I_m \Delta i_x + K_2 (k_A \alpha + k_B \beta) \\ F_\beta \simeq 12K_1 I_m \Delta i_y + K_2 (k_B \alpha + k_C \beta) \end{cases} \quad (4.16)$$

onde:

$$K_2 = \frac{K}{2g_0^3} \quad (4.17)$$

e ainda:

$$\begin{aligned} k_A &= 4,052(I_m^2 + \Delta i_x^2 + \Delta i_y^2) - 0,856(\sin 2\theta_e)\Delta i_x \Delta i_y - 0,428(\cos 2\theta_e)(I_m^2 + \Delta i_x^2 - \Delta i_y^2) \\ k_B &= 0,856(\cos 2\theta_e)\Delta i_x \Delta i_y + 0,428(\sin 2\theta_e)(I_m^2 - \Delta i_x^2 + \Delta i_y^2) \\ k_C &= 4,052(I_m^2 + \Delta i_x^2 + \Delta i_y^2) + 0,856(\sin 2\theta_e)\Delta i_x \Delta i_y + 0,428(\cos 2\theta_e)(I_m^2 + \Delta i_x^2 - \Delta i_y^2) \end{aligned}$$

Este resultado mostra que surgem algumas interferências cruzadas entre os sinais de controle das duas direções ortogonais de sensoriamento quando o rotor não está exatamente centralizado. E surgem também perturbações pulsantes dadas pelos termos senoidais de frequência duas vezes maior que aquela do campo girante.

Para simplificar, desprezam-se os termos dependentes de  $\theta_e$ , mantendo-se somente os termos constantes, de maior magnitude:

$$\begin{aligned} k_A &\simeq 4,052(I_m^2 + \Delta i_x^2 + \Delta i_y^2) \\ k_B &\simeq 0 \\ k_C &\simeq k_A \end{aligned}$$

A existência da força peso sobre o rotor deve fazer com que o sinal de controle que atua na direção vertical assuma um valor médio diferente de zero. Já o sinal de controle ao longo da direção horizontal deve manter uma média nula. Considerando que a amplitude desta componente média é bem maior que suas variações, utiliza-se seu valor como ponto de operação. Portanto, pode-se desprezar o termo  $\Delta i_x^2$  na simplificação anterior, mantendo-se apenas o valor médio de  $\Delta i_y$ :

$$\begin{cases} F_\alpha \simeq 12 K_1 I_m \Delta i_x + 4,052 K_2 \left( I_m^2 + \overline{\Delta i_y^2} \right) \alpha \\ F_\beta \simeq 12 K_1 I_m \Delta i_y + 4,052 K_2 \left( I_m^2 + \overline{\Delta i_y^2} \right) \beta \end{cases} \quad (4.18)$$

Observa-se, então, que as duas direções de controle podem ser tratadas independentemente e os modelos simplificados para a força atuante são idênticos.

## 4.2.2 Equação dinâmica

Começando-se com a Segunda Lei de Newton para Rotação, obtém-se agora um modelo dinâmico para os movimentos laterais do rotor. As seguintes considerações são adotadas:

- Assume-se que os posicionamentos radiais dos dois extremos do rotor não se influenciam entre si; ou seja, a extremidade à direita funciona como um mancal de apoio, somente restringindo os dois graus de liberdade referentes a seu movimento radial;
- Despreza-se qualquer efeito giroscópico do rotor, de modo a manter o tratamento independente entre as direções vertical e horizontal de posicionamento radial;
- Despreza-se qualquer atrito entre o rotor e o ar que o envolve, dentro do entreferro.

Como o modelo para as duas direções em cada ponto de apoio são consideradas independentes e iguais, basta analisar uma delas. Escolhe-se o posicionamento ao longo da direção vertical do eixo Y. Um esquema que descreve o deslocamento do rotor ao longo desta direção está desenhado na fig. 16. Lembrando-se que a análise está sendo realizada sobre somente uma das extremidades do rotor, nesta figura estão mostradas as variáveis referentes ao movimento do lado esquerdo.

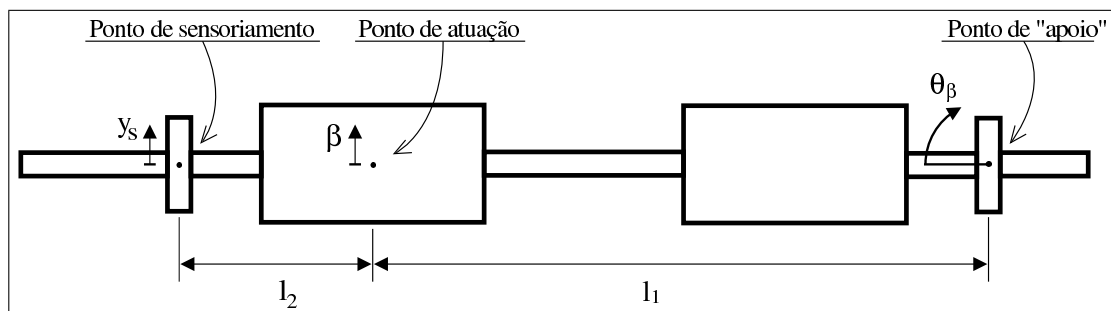


Figura 16: Diagrama de corpo livre para o rotor

Nesta figura:

$l_1$  é o braço de alavanca entre o ponto de apoio e o de aplicação da força magnética;

$l_2$  é a extensão do braço de alavanca até o ponto de fixação dos sensores de posicionamento.

Pela 2ª Lei de Newton para movimentos rotacionais:

$$I_r \ddot{\theta}_\beta = \tau_\beta$$

onde:

$I_r$  é o momento de inércia do rotor em relação ao eixo paralelo ao eixo X, passando pelo ponto de apoio, à direita na figura 16;

$\theta_\beta$  é o ângulo de deslocamento do rotor em relação ao ponto de apoio;

$\tau_\beta$  é o torque aplicado ao rotor em relação ao ponto de apoio.

Pela figura, nota-se que  $\beta \simeq (\theta_\beta \cdot l_1)$ , pois a variação do ângulo  $\theta_\beta$  é sempre muito pequena. Ou seja, o deslocamento linear  $\beta$  pode ser aproximado pelo comprimento do arco descrito ao se deslocar o ponto de atuação, quando  $\theta_\beta$  varia. E também,  $\tau_\beta = (F_\beta \cdot l_1)$ . Aplicando-se estas definições, substituem-se  $\theta_\beta$  e  $\tau_\beta$  na equação de Newton:

$$\frac{I_r}{l_1} \ddot{\beta} = l_1 F_\beta$$

Aplicando-se a eq. (4.18) aqui, tem-se:

$$\frac{I_r}{l_1} \ddot{\beta} = l_1 \left[ 12 K_1 I_m \Delta i_y + 4,052 K_2 (I_m^2 + \overline{\Delta i_y}^2) \beta \right]$$

E usando-se a relação de transformação mecânica abaixo,

$$\beta \simeq \frac{l_1}{l_1 + l_2} y_s$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{I_r}{(l_1 + l_2)} \ddot{y}_s &= l_1 \left[ 12 K_1 I_m \Delta i_y + \frac{4,052 K_2 l_1 (I_m^2 + \overline{\Delta i_y}^2)}{(l_1 + l_2)} y_s \right] \rightarrow \\ \ddot{y}_s &= \underbrace{\left[ \frac{4,052 K_2 l_1^2 (I_m^2 + \overline{\Delta i_y}^2)}{I_r} \right]}_{K_4} y_s + \underbrace{\left[ \frac{12 K_1 I_m l_1 (l_1 + l_2)}{I_r} \right]}_{K_3} \Delta i_y \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde:

$y_s$  é o deslocamento radial do ponto de sensoriamento, ao longo da direção Y.

### 4.2.3 Função de transferência

O diagrama de blocos para o sistema de controle de posição em malha aberta está mostrado na fig. 17.

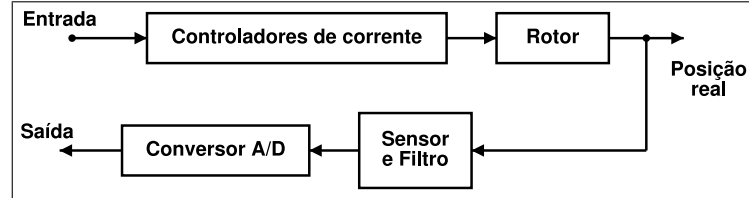


Figura 17: Modelo para o controle de posição radial do rotor

A equação dinâmica que rege o movimento radial do rotor, eq. (4.19), foi calculada na seção anterior. Aplica-se a Transformada de Laplace sobre ela para obter:

$$G_p(s) = \frac{Y_s(s)}{\Delta I_y(s)} = \frac{K_3}{(s^2 - K_4)} \quad (4.20)$$

onde:

$$K_3 = \frac{12 K_1 I_m l_1 (l_1 + l_2)}{I_r} \quad (4.21)$$

$$K_4 = \frac{4,052 K_2 l_1^2 (I_m^2 + \overline{\Delta i_y^2})}{I_r} \quad (4.22)$$

Seguindo com a descrição, os sensores de posição radial são aproximados por filtros passa-baixa de primeira ordem e, portanto, influenciam na dinâmica do sistema. Sua função de transferência é obtida de medições de ganho e cálculo de constantes de tempo (apêndice B):

$$H_p(s) \simeq \frac{1,702 \cdot 10^7}{s + 4255}$$

O ganho do conversor analógico-digital é o mesmo usado no controle de correntes:  $K_{ad} = 330,3$ .

Deveria-se incluir a dinâmica da malha de controle de correntes, pois suas referências não são instantaneamente impostas às bobinas do estator. No entanto isto levaria a uma complexidade maior para o modelo. Prefere-se, então, desprezar-se este efeito de atraso, já que é possível assumir isto: o controle de correntes atua bem mais rapidamente que o de posição radial. Portanto, usa-se somente o ganho estático dos controladores de correntes como modelo para suas atuações:

$$K_{cc} = \frac{1}{K_{ad} K_{sc}}$$

onde  $K_{sc}$  foi determinado no apêndice B:  $K_{sc} \simeq 0,2052$ .

Cascadeando-se todas as funções de transferência e ganhos determinados até aqui, chega-se à F.T. em malha aberta:

$$GH_p(s) = G_p(s)H_p(s)K_{ad}K_{cc} = \frac{G_p(s)H_p(s)}{K_{sc}} \rightarrow$$

$$GH_p(s) \simeq \frac{8,294 \cdot 10^7 K_3}{(s^2 - K_4)(s + 4255)} \quad (4.23)$$

Percebe-se a instabilidade inerente ao sistema em malha aberta, dada pela presença de um pólo com parte real positiva, no plano  $s$ . Desta equação e das definições de  $K_3$  e  $K_4$ , vê-se também que: tanto o ganho quanto os pólos reais simétricos variam em relação direta com o valor de pico da corrente de acionamento,  $I_m$ . Este último parâmetro está ligado ao fluxo principal da máquina: é a corrente de magnetização.

#### 4.2.4 Discretização

Antes de se aplicar a discretização, os seguintes valores numéricos são usados para os parâmetros ainda não especificados (apêndice B):

$$\begin{cases} K_3 = 50,234 \\ K_4 = 2,5840 \cdot 10^4 \end{cases}$$

A taxa de amostragem é a mesma que a do controle de correntes. Os dois subsistemas estão sincronizados para aproveitar melhor os recursos de temporização do processador de sinais digital:

$$T_a = 375 \mu s$$

Com isso, a função de transferência em malha aberta discretizada pode ser escrita assim:

$$GH_p(z) = \frac{0,0256743(z + 0,171228)(z + 2,65183)}{(z - 1,06213)(z - 0,9415)(z - 0,202782)} \quad (4.24)$$

O pólo em 1,06213 (fora do círculo unitário do plano  $z$ ) confirma novamente a instabilidade do sistema, sendo necessária a compensação através de realimentação negativa para estabilizá-lo, assim como mostrado mais adiante.

### 4.2.5 Influência da corrente de magnetização sobre a estabilização do sistema

A corrente de magnetização é uma variável que pode ser alterada dentro de certos limites durante o funcionamento da máquina, quando se aplica o controle de torque e fluxo. Por exemplo, ao se acionar o motor em velocidades acima da nominal, um procedimento comum é o enfraquecimento do campo de modo a não deformar as tensões aplicadas sobre o estator.

Para avaliar a influência da amplitude da corrente de magnetização sobre a estabilização do sistema, faz-se com que ela varie dentro da faixa limitada pelo valor de saturação, que foi medido em 1,5 A. Na figura 18, para 50 valores de corrente nas abscissas, plotam-se os pólos do sistema em malha aberta. Como todos os três pólos em malha aberta são reais, somente o eixo real é mostrado, para as ordenadas, na vertical. Pelo gráfico, quanto maior a corrente de magnetização, mais difícil é a estabilização do sistema, pois existe um pólo que progressivamente se afasta de 1, que neste gráfico representa o cruzamento do círculo unitário com o eixo real, no plano complexo para o sistema discretizado.

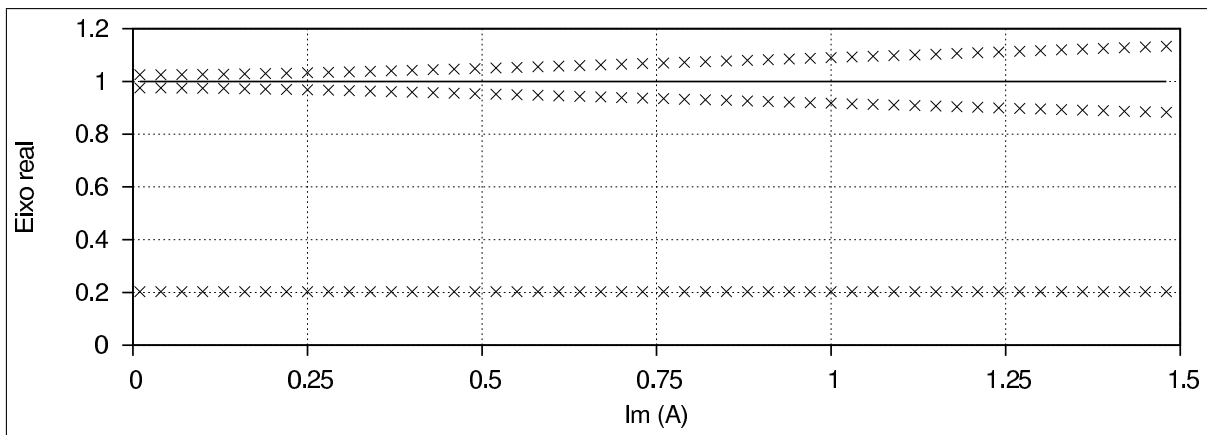


Figura 18: Pólos do sistema em malha aberta em função da corrente de magnetização

### 4.2.6 Equação de estado

Expressando-se a eq. (4.24) na forma padrão, tem-se:

$$GH_p(z) = \frac{0,0256743z^2 + 0,07248z + 0,0116578}{z^3 - 2,20642z^2 + 1,4063z - 0,202782}$$

A partir disso, escreve-se diretamente a equação de estado sob a forma canônica

controlável:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2,20642 & -1,4063 & 0,202782 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0,0256743 & 0,07248 & 0,0116578 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.25)$$

Aqui também as variáveis de estado não têm significado físico direto. A representação matricial é usada somente para facilitar a simulação do sistema, ao se testar seu desempenho no domínio do tempo, durante a etapa de projeto dos controladores.

As equações de estado discretas obtidas neste capítulo modelam somente os sistemas em malha aberta. Ainda é necessário definir os tipos de controlador a serem cascadeados com eles, para depois fazer a realimentação unitária. Isto está melhor detalhado no capítulo a seguir, mais especificamente na seção relativa ao controle de posição radial, que é a mais importante para este trabalho.

## 5 Controle

### 5.1 Correntes no estator

Por haverem 6 malhas independentes, deve-se buscar um controlador o mais simples possível, de modo a não sobrecarregar o processador digital com algoritmos muito exigentes. A simplicidade de um controlador proporcional-integrativo (PI) é suficiente para trazer um bom desempenho a esta parte do sistema, eliminando o erro em regime permanente. O diagrama de blocos completo para um dos seis laços está mostrado na fig. 19.

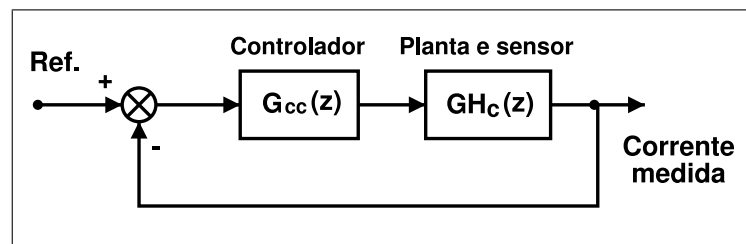


Figura 19: Diagrama de blocos do sistema de controle de correntes no estator

A aproximação usada para a função de transferência do controlador PI é a seguinte:

$$G_{cc}(z) = K_{pc} + K_{ic} \left( \frac{z}{z-1} \right) = (K_{pc} + K_{ic}) + \frac{K_{ic}}{z-1} \quad (5.1)$$

onde:

$K_{pc}$  é o ganho da parte proporcional do controlador de corrente;

$K_{ic}$  é o ganho da parte integrativa do controlador de corrente.

Para definir estes ganhos, minimiza-se o critério SQTE (Somatório do Quadrado do Tempo vezes o Erro)<sup>1</sup> para o erro da resposta ao degrau unitário. Esta função custo está

<sup>1</sup>Vários critérios de desempenho somatórios são citados em Isermann (1989)

especificada abaixo:

$$F_{cc} = \sum_{k=1}^{500} [k \cdot e(k)]^2$$

Simula-se a resposta ao degrau do sistema em malha fechada, compensado com o controlador PI, obtendo-se o erro ao longo das iterações  $k$ . Este erro é uma função dos parâmetros do controlador,  $K_{pc}$  e  $K_{ic}$ . Pela definição da função  $F_{cc}$ , aplica-se o método de otimização de Rosenbrock<sup>2</sup>, partindo-se dos valores  $K_{pc} = 10$  e  $K_{ic} = 0,1$ . Um mínimo da função é encontrado para:

$$\begin{cases} K_{pc} \simeq 24,718 \\ K_{ic} \simeq 0,15757 \end{cases}$$

A resposta ao degrau unitário com o controlador definido por estes ganhos está desenhada na fig. 20.

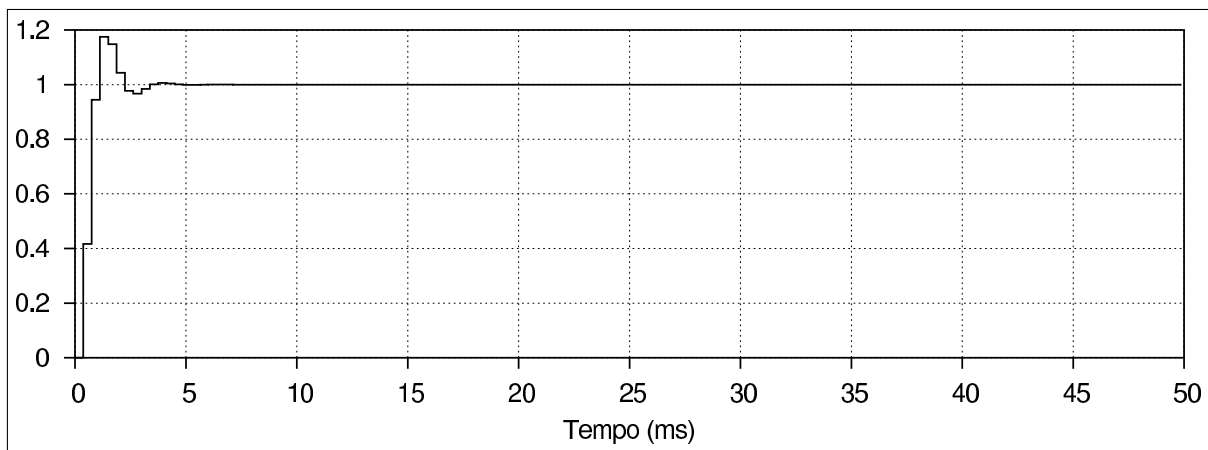


Figura 20: Resposta ao degrau unitário para o sistema de controle de corrente

A mesma metodologia de projeto é aplicada ao controle posicional. Nas próximas seções, os procedimentos de otimização e simulação estão melhor detalhados.

## 5.2 Posição radial do rotor

Este sistema de controle é um regulador, diferentemente do sistema de controle de correntes, que é classificado como seguidor. O objetivo aqui é manter o rotor levitando em uma referência de posição fixa, alinhada com o eixo central do estator. Este posicionamento deve ser insensível ou adaptável, dentro de certos limites, a perturbações externas (inclusive a própria força peso), de modo que o rotor possa girar livre de atrito mecânico.

<sup>2</sup>Muitos métodos para resolver problemas de otimização sem restrições estão compilados em Kowalik e Osborne (1968)

Deve-se atentar também para o requisito de energia. É interessante a minimização da potência de sustentação, já que o função primária da máquina é converter energia elétrica em mecânica ou vice-versa, com a maior eficiência possível.

### 5.2.1 Análise

Para se visualizar a instabilidade do sistema em realimentação unitária, basta interpretar o gráfico do lugar das raízes para o modelo (4.24) na figura 21.

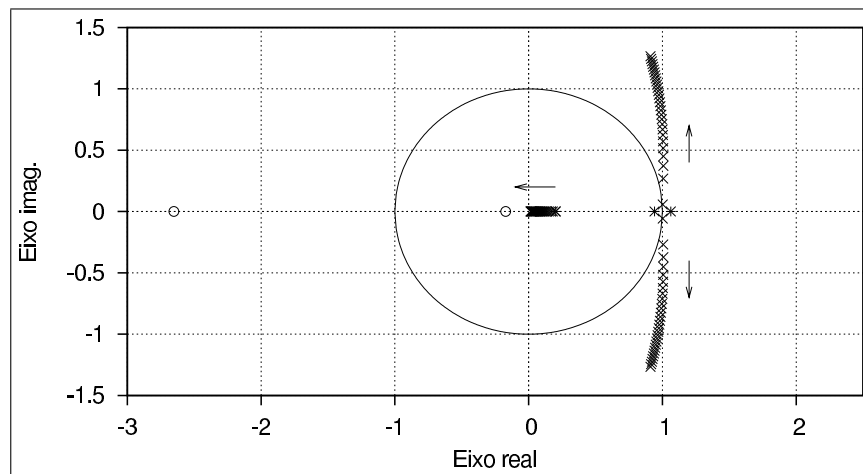


Figura 21: Lugar das raízes para o modelo de posição em realimentação unitária

Percebe-se que não é possível atrair todos os pólos para dentro do círculo unitário somente variando-se o ganho do controlador proporcional em cascata dentro da realimentação negativa. É necessário utilizar outro tipo de compensação. E a mais simples é um controlador em cascata que acrescente um pólo e um zero dentro do círculo unitário, para atrair o par de pólos que estão divergindo.

Para isso, o zero do controlador deve estar próximo aos dois pólos da planta à direita, para atraí-los. E o pólo do controlador deve estar longe desta região crítica. É mostrada a seguir uma implementação digital de um controlador do tipo proporcional-derivativo (PD) que tem estas características.

$$G_{cp}(z) = K_{pp} + K_{dp} \left( \frac{z-1}{z} \right) = (K_{pp} + K_{dp}) - \frac{K_{dp}}{z} = \frac{(K_{pp} + K_{dp})z - K_{dp}}{z} \quad (5.2)$$

onde:

$K_{pp}$  é o ganho da parte proporcional do controlador de posição;

$K_{dp}$  é o ganho da parte derivativa do controlador de posição.

Esta função de transferência tem um pólo exatamente na origem. E um zero dado pelos dois parâmetros de controle:

$$z_{cp} = \frac{K_{dp}}{K_{pp} + K_{dp}}$$

Este zero justifica a capacidade desse controlador para estabilizar o sistema mostrado no gráfico 21: basta escolher adequadamente os valores de  $K_{pp}$  e  $K_{dp}$ . A seguir é indicado como fazer esta escolha.

### 5.2.2 Otimização

Dois motivos destacam-se para definir a função de otimização usada no ajuste dos parâmetros do regulador de posição:

1. A energia expendida está relacionada de certa forma com a amplitude dos sinais de controle. Esta é uma boa razão para se minimizar o valor eficaz desta variável. E ao mesmo tempo, isso torna o sistema mais imune à presença de ruídos na malha de realimentação.
2. O sinal de posicionamento é aplicado como referência para o controlador de corrente. O primeiro deve atuar mais suavemente que o último para não haver atrasos que possam degenerar a estabilidade, já que não se levou em consideração a dinâmica do controle de correntes para a modelagem do sistema de posicionamento rotórico.

A referência degrau unitário é aplicada sobre o sistema relaxado, obtendo-se uma resposta de onde se calcula a seguinte função custo de controle:

$$F_{cp} = \frac{1}{[y(\infty)]^2} \sum_{k=1}^{2500} \{ [e(k)]^2 + 10[u(k)]^2 \}$$

onde:

$y(\infty)$  é o valor final da saída em resposta a um degrau unitário;

$e(k) = [y(\infty) - y(k)]$  é o erro entre o valor final e o valor atual da saída no instante  $k$ ;

$u(k)$  é o sinal de controle aplicado no instante  $k$ .

A primeira observação diz respeito ao uso do valor final da saída como fator de normalização. O erro em regime permanente não é nulo, levando a um valor final que varia

de acordo com os parâmetros do controlador. Isto incluiria uma influência do erro em regime sobre o custo da função. Com a normalização, somente a dinâmica do erro e a amplitude relativa do sinal de controle são levados em conta na totalização do custo.

A segunda observação é para a relação entre a influência do erro e a do sinal de controle, que foi escolhida empiricamente como 1:10. No cálculo da função custo, a importância de  $u(k)$  fica 10 vezes maior que a de  $e(k)$ . Isto faz com que a amplitude do sinal de controle seja minimizado com maior prioridade, assim como requerido pelo *motivo 1* citado acima. Conseqüentemente, a resposta do sistema também é suavizada, satisfazendo automaticamente a indicação requerida no *motivo 2*.

O valor final  $y(\infty)$  ao se impor um degrau unitário pode ser expresso em função das matrizes que definem a equação de estado de um sistema, aplicando-se o teorema do valor final para a transformada Z:

$$y(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z-1}{z} y(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \right] = \mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Na próxima seção será mostrado como simular o sistema realimentado através do cascadeamento do controlador para, finalmente, chegar à minimização da função custo aqui definida.

### 5.2.3 Simulação

Representando-se a função de transferência do controlador definido em (5.2) sob a forma canônica controlável de uma equação de estado, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -K_{dp} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} (K_{pd} + K_{dp}) \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Chamando-se este de sistema 1, ele é definido simplesmente pelo conjunto de matrizes  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_1 &= \begin{bmatrix} -K_{dp} \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_1 &= \begin{bmatrix} (K_{dp} + K_{pd}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Deve-se cascadeá-lo com o sistema que modela o posicionamento do rotor, definido em

(4.25) e denominado sistema 2, cujas matrizes são:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2,20642 & -1,4063 & 0,202782 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = [ 0,0256743 \quad 0,07248 \quad 0,0116578 ]$$

$$\mathbf{D}_2 = [ 0 ]$$

Pode-se mostrar que o resultado do acoplamento em cascata do sistema 1 com o 2 é dado por:

$$\mathbf{A}_{1 \rightarrow 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & (\mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2) \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{1 \rightarrow 2} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2) \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{1 \rightarrow 2} = [ \mathbf{C}_1 \quad (\mathbf{D}_1 \mathbf{C}_2) ]$$

$$\mathbf{D}_{1 \rightarrow 2} = [ (\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2) ]$$

E para aplicar a realimentação unitária de um sistema definido por  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ , onde a matriz  $\mathbf{D}$  é nula, somente a matriz  $\mathbf{A}$  muda:

$$\mathbf{A}_r = [ (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}) ]$$

Estas fórmulas facilitam a simulação do sistema resultante e a otimização dos parâmetros de controle. Para inicializar a minimização da função custo, parte-se dos seguintes valores para os ganhos do controlador de posição:

$$K_{pp} = K_{dp} = 0,001$$

Novamente é usado o método de Rosenbrock, que leva os parâmetros do controlador a convergirem para o seguinte ponto:

$$\begin{cases} K_{pp} \simeq 0,065621 \\ K_{dp} \simeq 0,74014 \end{cases} \quad (5.3)$$

Os resultados da simulação estão plotados nas figuras 22 e 23. Comparando-se com a simulação da figura 20, percebe-se claramente que o tempo de resposta aqui é mais lento que para o controle de correntes, assim como requerido antes.

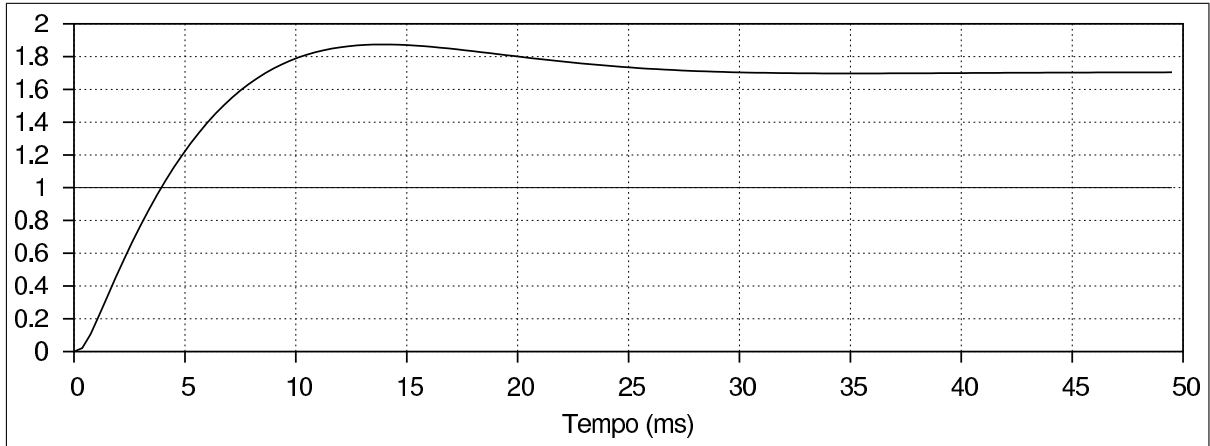


Figura 22: Resposta ao degrau unitário para o controle de posição

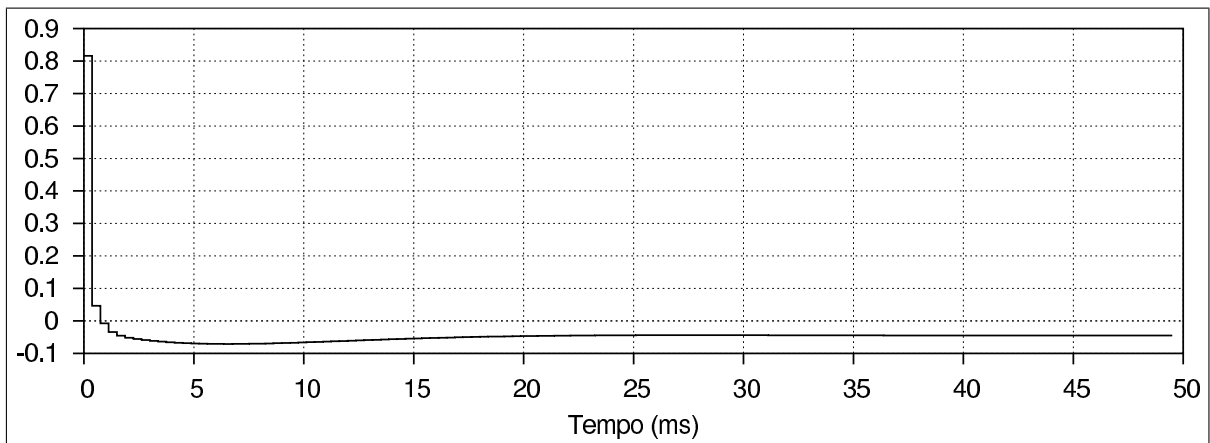


Figura 23: Sinal de controle de posição para o degrau unitário

Assim, ficam definidos os controladores para o sistema de posicionamento radial e para o controle de correntes no estator. Antes de verificar experimentalmente o desempenho alcançado com eles, são especificadas as implementações das diversas partes do conjunto, no próximo capítulo.

## 6 Implementação

### 6.1 Componentes físicos

Nesta seção definem-se as relações entre os diversos circuitos elétricos por onde flui a energia e os circuitos eletrônicos que controlam a potência elétrica convertida. O diagrama de blocos dos componentes físicos está mostrado na figura 24.

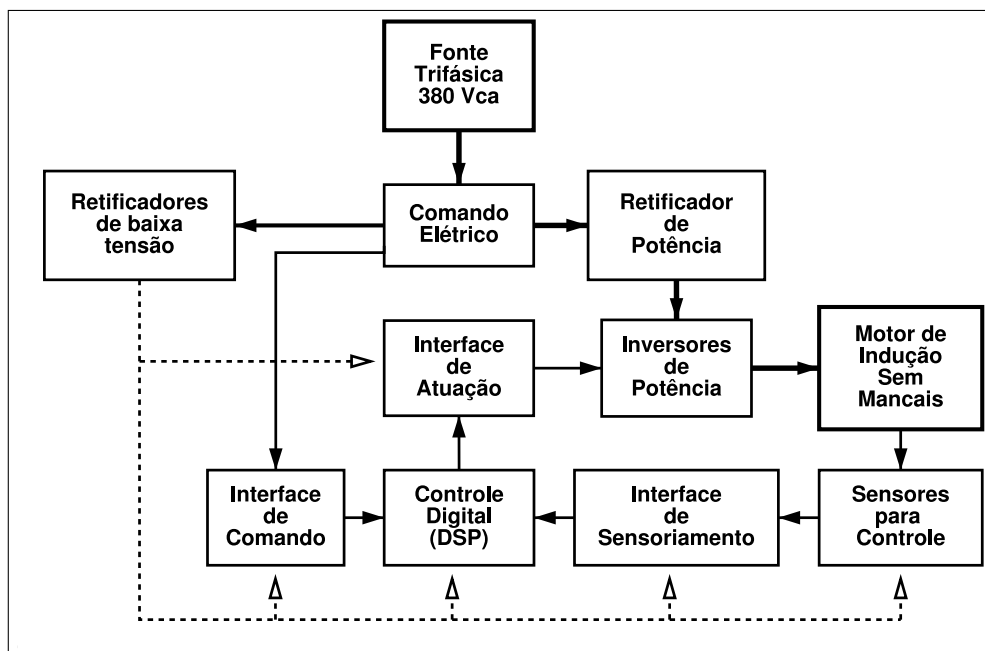


Figura 24: Diagrama de blocos elétrico

Ao todo 9 blocos compõem a parte eletro-eletrônica do sistema. Eles serão resumidamente explicados a seguir.

#### Comando elétrico

Todo o equipamento foi montado dentro de um armário, com um painel elétrico amplo. O comando contém dispositivos para conectar a fonte de alimentação trifásica externa ao

barramento de tensão interno: um contator, botoeiras NA-NF, um botão de emergência e uma mini-chave liga-desliga. Existem estes dispositivos de proteção: um disjuntor trifásico e três fusíveis. E também elementos de monitoramento e advertência: um voltímetro, um amperímetro e duas lâmpadas indicadoras.

### Retificador de potência

Este é um retificador trifásico de onda completa, assim como mostrado na figura 25. Ele é alimentado por uma fonte trifásica variável, permitindo controlar o nível de tensão de sua saída.

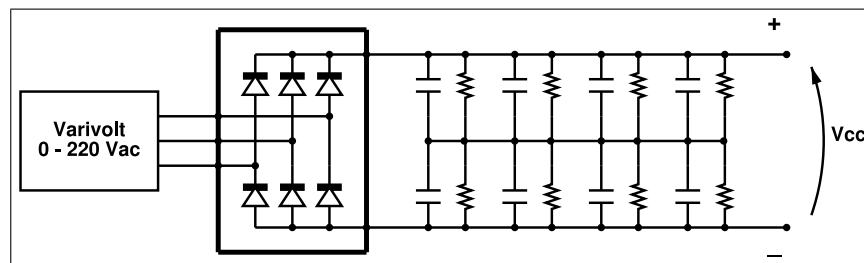


Figura 25: Retificador de potência

### Inversores de potência

Divide-se os seis enrolamentos do estator em dois conjuntos, alimentando-os através de dois inversores trifásicos, como mostrado na figura 26. O número de chaves totaliza 12, sendo este o número de sinais PWM necessários para controlar os inversores trifásicos. Deve-se observar que os sinais são complementares dois a dois, havendo um tempo morto adequado entre o chaveamento dos IGBT's de cada braço.

### Sensores para controle

O controle de correntes requer 6 sensores e o de posição 2, totalizando 8 sinais a serem processados.

Os sensores de corrente utilizam-se do efeito Hall para medir um fluxo magnético diretamente proporcional à passagem da corrente elétrica através de um circuito magnético, com baixíssimas perdas. A faixa de entrada para estes sensores é de 0 a 8,5 A. E sua tensão de saída varia entre 0 e 5,0 V.

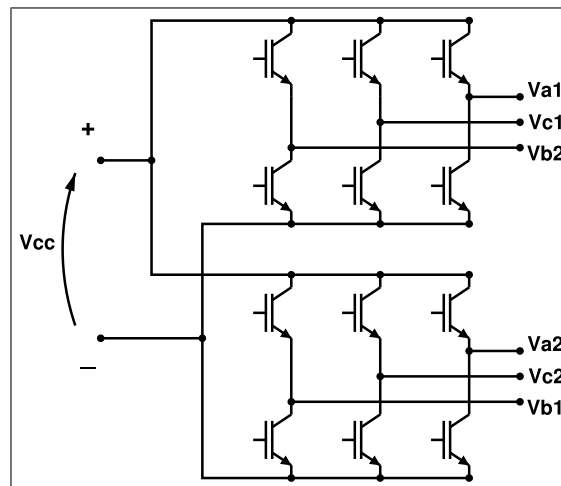


Figura 26: Inversor de potência

Os sensores de posição são baseados na indução de correntes parasitas sobre materiais condutores (correntes de Foucault). O objeto alvo de sensoriamento usado é um disco grosso de aço fixado no rotor (ver figura 44, no apêndice A). E os dois elementos sensores são fixados na carcaça do motor, um na direção horizontal e o outro na vertical. A faixa de entrada para eles é de 0 a 2 mm, correspondendo a uma variação de  $-5$  a  $+5$  V para a tensão de saída. Tanto o ganho, deslocamento e linearidade da resposta podem ser ajustados dentro de certos limites através de potenciômetros de precisão.

### Controlador digital

O processamento digital de sinais provê boa confiabilidade e flexibilidade para a implementação de muitas estratégias de controle. Aquela aplicada aqui está detalhada mais adiante. O DSP utilizado tem todas as características necessárias ao processamento dos sinais de controle e atuação, assim como especificado no capítulo 2.

As entradas analógicas do DSP estão na faixa entre 0 e 3,1 V. Por isso é necessário se utilizar circuitos de atenuação e deslocamento para os sensores: suas tensões de saída não coincidem com esses limites de entrada.

### Interface de sensoriamento

Todos os sinais de sensoriamento devem atravessar um filtro “passa-baixas”, de modo a diminuir o efeito de rebatimento de frequências que ocorre com sinais amostrados no tempo. A taxa de amostragem da digitalização está fixada em 2667 Hz pelo algoritmo de controle (ver seção 6.2.1). Com isso, a largura de banda dos sinais deve ser limitada

pelo menos na metade desta taxa. Define-se então a frequência de corte dos filtros em aproximadamente um quarto da frequência de amostragem:

$$f_c = \frac{f_a}{4} \simeq 667 \text{ Hz} \simeq 4200 \text{ rad/s}$$

Além disso, o nível dos sinais deve variar sobre a mesma faixa do conversor analógico-digital do DSP: 0 a 3,1 V. Para os sensores de posição, basta atenuar sua resposta através de uma rede resistiva com a relação  $\frac{3,1}{5,0}$ . Já para os sensores de posição é necessário tanto uma atenuação quanto um deslocamento do nível de tensão de suas saídas.

### **Interface de atuação**

Os IGBT's dos inversores devem ser chaveados rapidamente. Para isso é importante que suas portas sejam acionadas por circuitos com capacidade de fornecer picos de corrente da ordem de 1 A. O nível de sinal adequado para ligar um IGBT é aproximadamente igual a 15 V. Portanto, é necessário elevar o sinal de 3,3 que sai dos pinos do DSP para os 15 V exigidos pelos circuitos de acionamento. Estes circuitos também isolam eletricamente os pulsos enviados às portas dos IGBT's dos pulsos que chegam do DSP.

### **Interface de comando**

Esta é responsável por sinalizar ao DSP comandos para ligar e desligar os pulsos de PWM, habilitando ou não os inversores de potência. Ela está restrita a esta simples função, que é o mínima necessária para operar o motor de acordo com os testes apresentados nesta dissertação.

### **Retificadores de baixa tensão**

São quatro as tensões requeridas pelos diversos circuitos eletrônicos apresentados anteriormente. A exigência de cada bloco de circuitos está especificada abaixo:

- Sensores de corrente: +5 V
- Sensores de posição: -15 e +15 V
- Processador de sinais digital (DSP): +3,3 V
- Interface de atuação: +15 V

### 6.1.1 Realinhamento dos sensores de posição

O modelo obtido para o controle de posição assume que os grupos de bobinas da fase A estão alinhados com a direção de sensoriamento X, na horizontal. O lado do protótipo testado (parte frontal) apresenta um desalinhamento angular de  $10^\circ$  entre os eixos centrais das bobinas do estator e a linha de visada dos sensores. Uma pequena correção deve ser feita para não incluir este erro nos sinais de realimentação para o posicionador.

Esse erro foi detectado visualmente, observando os enrolamentos dentro de estator. A confirmação é obtida pelo seguinte procedimento:

- Coloca-se o motor na posição vertical, para eliminar a influência da força peso sobre o rotor;
- Aplica-se sobre um osciloscópio os dois sinais de posicionamento, plotando-os um em função do outro (modo XY);
- Aplica-se uma corrente contínua nas bobinas do estator, uma de cada vez, marcando no osciloscópio a posição para onde o rotor é atraído.

Sabendo-se que os sensores estão fixados corretamente na carcaça, o desenho obtido na figura 27 evidencia a imperfeição do estator.

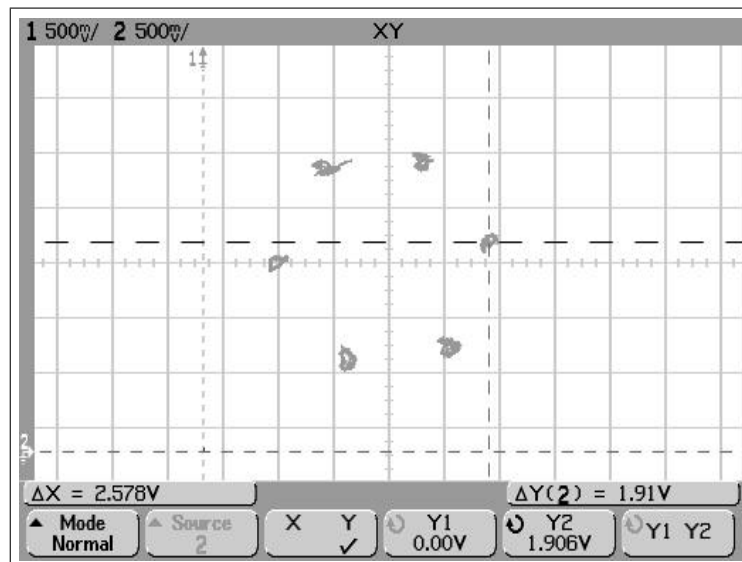


Figura 27: Desalinhamento angular entre o estator e os sensores de posição

Usando-se o sentido anti-horário de crescimento, observa-se a diferença de ângulo de  $10^\circ$ . Para corrigir este erro, basta aplicar uma transformação rotacional ao vetor posição

radial composto pelos sinais lidos dos dois sensores de posição:

$$\begin{bmatrix} x_r^* \\ y_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 10^\circ & \sin 10^\circ \\ -\sin 10^\circ & \cos 10^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

O efeito obtido é o giro em  $-10^\circ$  do sistema de coordenadas para o vetor posição lido. Esta mudança de base realinha os sinais de posição sensorizados com as direções em que os enrolamentos do estator foram montados<sup>1</sup>.

## 6.2 Algoritmos para os sistemas de controle

O trabalho com DSP's exige certos cuidados para não se deteriorar seu desempenho com códigos ineficientes. Isto é mais relevante ainda ao se usar uma linguagem de programação de alto nível, tal como a linguagem *C*. O ambiente de desenvolvimento utilizado possibilitou isso, trazendo uma grande rapidez para o teste de várias configurações de fluxo do programa, chegando-se finalmente a uma versão com um bom desempenho.

No entanto, há um custo de aprendizagem de técnicas específicas, relacionadas a este fato: o DSP é um dispositivo designado para ser programado em linguagem de máquina (*Assembly*). A linguagem *C* facilita enormemente a leitura do programa, mas para um DSP, não libera o usuário da tarefa de considerar as limitações do processador, pensando em como o compilador poderá implementar o código a ser executado. No presente caso, as principais limitações são:

1. Aritmética com números inteiros;
2. Inexistência de instruções para divisão entre duas variáveis;
3. Muitos níveis de interrupções levam a um maior tempo de resposta a eventos;

Levando-se em consideração estas características, os seguintes cuidados são tomados:

- Não usar de forma alguma variáveis em ponto flutuante: deve-se aproximar os números fracionários por números racionais da forma:  $\frac{x}{2^n}$ , onde  $n$  é um número natural e  $x$  é um inteiro; com isso, a divisão pelo termo  $2^n$  é eficientemente implementada pela instrução de deslocamento à direita;

---

<sup>1</sup>Boldrini et al. (1980)

- Evitar o uso de divisões entre duas variáveis, pois muitas instruções de máquina são requeridas para emular esta operação;
- Restringir as interrupções a um só tipo, pois o atendimento periódico sem atrasos é fundamental para o bom funcionamento dos algoritmos de controle digital; o uso de várias interrupções diminui cada vez mais o tempo de processamento disponível para tarefas de controle de alta velocidade;
- Minimizar o uso de estruturas em laço, pois elas acrescentam instruções de controle de fluxo que podem tomar uma fração de tempo significativa comparando-se com o código linear equivalente;

Após estes breves comentários, seguem diversos esclarecimentos sobre a organização do programa contendo os algoritmos de controle.

### 6.2.1 Organização

Os temporizadores são os elementos mais importantes para a geração de uma base de tempo fixa que permita implementar um laço de controle periódico. Dois temporizadores são usados: um para criar o período básico que fixa a frequência dos sinais PWM e gera chamadas à função de controle através de uma interrupção (temporizador 1); o outro é responsável por um PWM auxiliar que possibilita monitorar algum sinal gerado pelo processador (temporizador 3). Para manter o PWM simétrico, o modo de contagem dos temporizadores é configurado em crescente/decrescente.

O período do temporizador 1 foi fixado em 1500. Com uma frequência de relógio eficaz em 20 MHz, isso leva a um período de:

$$T_{pwm} = 1500 \left( \frac{1}{20 \cdot 10^6} \right) = 75 \mu s$$

Ou seja, a frequência de chaveamento dos inversores é aproximadamente igual a 13,3 kHz.

O conversor analógico-digital (AD) é configurado para permitir a aquisição sequencial de vários sinais: 6 para as correntes e 2 para a posição do rotor. Os processos de conversão são iniciados explicitamente quando necessários. Não se usam interrupções para o evento de término de aquisição: para isso, depois de iniciado o processo, monitora-se o bite indicador de fim de conversão, repetitivamente.

O sinal de PWM auxiliar é fixado pelo período do temporizador 3:

$$T_{aux} = 1024 \left( \frac{1}{20 \cdot 10^6} \right) = 51,2 \mu s$$

O período em 1024 cria uma correspondência direta com a resolução dos conversores AD. Assim, sinais de referência podem ser comparados analogicamente com os sinais lidos pelos sensores. Para isso, basta usar uma rede RC que elimine as harmônicas de alta-freqüência desse sinal PWM, deixando passar seu valor médio.

A única interrupção habilitada foi aquela que se refere ao início de cada período do temporizador 1. As tarefas de controle são distribuídas ao longo de 5 desses períodos, que se repetem indefinidamente, assim como esquematizado na figura 28. Este fluxograma mostra as relações principais de execução entre vários blocos do sistema.

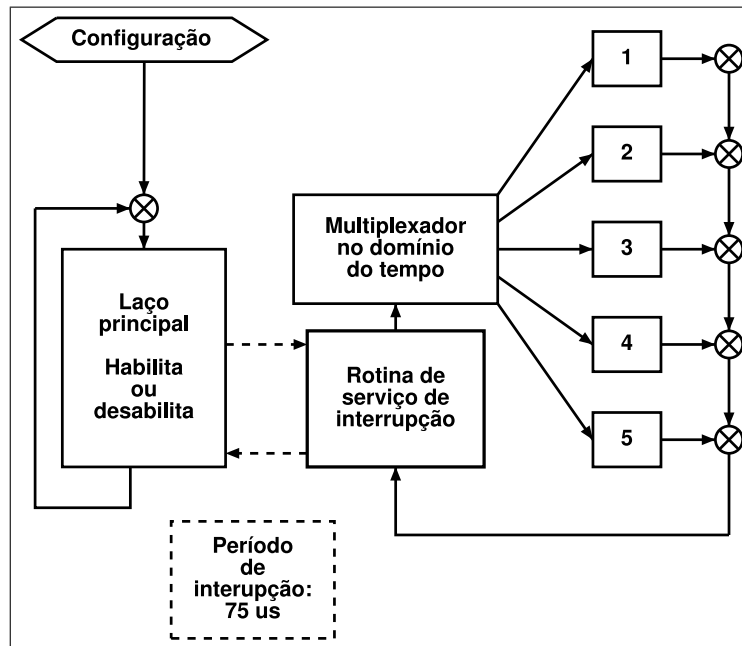


Figura 28: Fluxograma do programa controlador do sistema

Os 5 ciclos estão assim ordenados:

- 1 - Livre;
- 2 - Tarefas auxiliares;
- 3 - Preparação para o controle de posição;
- 4 - Algoritmo de controle de posição;
- 5 - Algoritmo de controle de correntes;

O primeiro período está livre e pode ser aproveitado para executar tarefas relacionadas ao controle rotacional, em um trabalho posterior. A seqüência temporal de ocorrência destes ciclos pode ser visualizada por um osciloscópio através de um pino do DSP, configurado como saída digital. O nível de sinal deste pino é colocado em 1 no início da rotina que serve a interrupção e forçado a 0 ao final dela. Assim podem-se comparar os tempos utilizados pela execução de cada ciclo e verificar o sincronismo com os períodos de PWM na razão de 1:5. O resultado deste procedimento está plotado na figura 29.

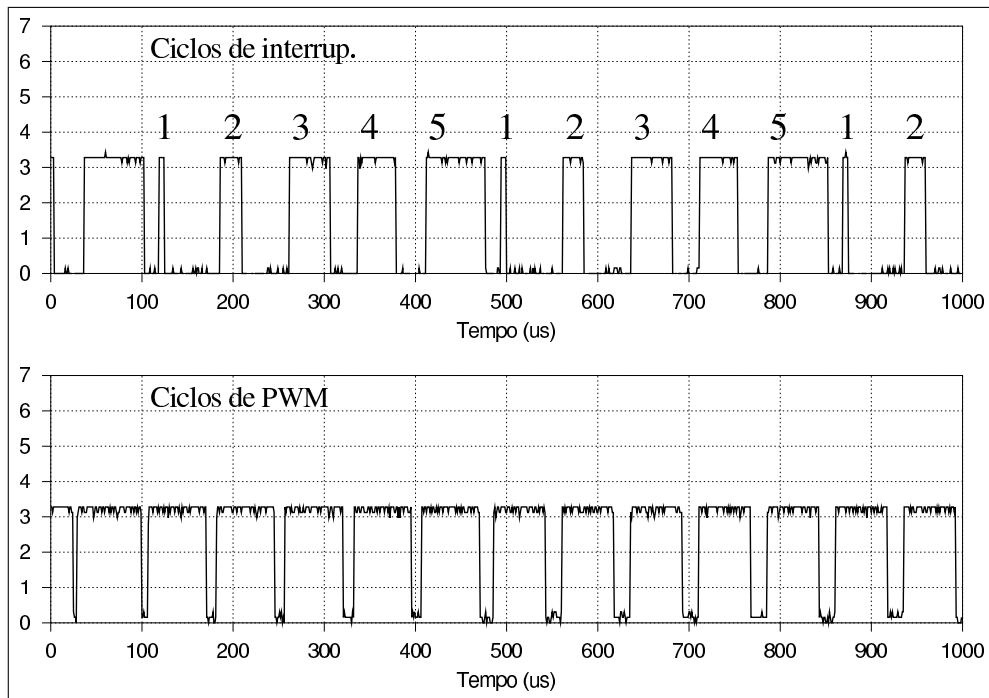


Figura 29: Diagrama temporal da distribuição das tarefas de controle

Daí vem a definição da taxa de amostragem para os controladores digitais:

$$T_a = 5 \cdot T_{pwm} = 375 \mu s$$

Nas próximas seções detalham-se os passos executados pelo programa e que estão ilustrados pelo fluxograma 28.

### 6.2.2 Comando e inicialização

Após a configuração dos temporizadores, dos canais para aquisição analógica e dos PWM's, o programa entra no laço principal, que tem somente duas funções: verificar o sinal de comando externo para ligar ou desligar os inversores; calibrar os sensores de corrente antes de iniciar o controle dos inversores.

Um dos pinos do DSP é usado como entrada digital, que recebe um sinal vindo de uma chave no painel frontal. Se o sinal recebido é 0, o programa desabilita imediatamente os inversores. Se o sinal recebido é 1, então passa-se ao modo ativo.

Antes de se ativar os inversores, o DSP faz várias leituras sobre os seis canais que sensoriam as correntes. Como todas as chaves estão ainda desabilitadas, as médias dos valores lidos correspondem às correntes nulas em cada bobina. Com isso consegue-se armazenar o valor de deslocamento de tensão de cada sensor, para aplicá-los como referências de corrente zero.

Com os inversores habilitados ou não, as interrupções continuam a ocorrer sempre e os processos descritos nas três próximas seções estão sempre se alternando em sua execução.

### 6.2.3 Tarefas auxiliares

Além das tarefas de controle, existem outros pequenos procedimentos que ajudam a investigar o comportamento do sistema:

- A saída de PWM auxiliar é atualizada junto com as referência de corrente ou de posição;
- Uma das referências (de corrente ou de posição) podem sofrer acréscimos e diminuições bruscas periodicamente, com o mesmo efeito de mudanças em degrau. Estas variações acontecem a cada 400 períodos de controle (para a corrente) ou a cada 2000 (para a posição); ou seja, a cada 0,15 ou a cada 0,75 segundos;
- A média do erro de posição é computada continuamente e acumulada em uma parte dos sinais de controle sob a forma de um termo que varia lentamente. Isto é usado para compensar forças laterais constantes, tal como a força peso que atua sobre o rotor. É o mesmo efeito de um integrador para a anulação do erro em regime, mas com uma dinâmica bastante lenta: é atualizado a cada 0,75 s.

### 6.2.4 Controle de posição

Esta parte do sistema exige muitos cálculos e sua execução não cabe em um só ciclo de interrupção. A primeira parte é uma preparação para poder aplicar o algoritmo de controle de posição. As tarefas contidos nessa 1ª parte são:

- Leitura seqüencial automatizada dos dois canais que sensoriam a posição do rotor;

- Atualização da referência trifásica para as correntes principais do estator;
- Cálculo dos termos  $\sin(\theta)$  e  $\cos(\theta)$  a serem aplicados na transformação (4.13);
- Correção do ângulo dos sensores de posição ( $10^\circ$ );
- Cálculo dos sinais de erro para as duas direções radiais de posicionamento;
- Cálculo da variação dos sinais de erro, para serem aplicados na ação derivativa do controlador PD;

Já a lei de controle é implementada na segunda etapa em que se divide o processo:

- Cálculo da ação proporcional do PD;
- Cálculo da ação derivativa do PD;
- Limitação da ação compensativa do peso;
- Soma dos três termos anteriores;
- Estes cálculos são feitos primeiro para as variáveis de controle ao longo da direção X (horizontal). Repetem-se os quatro itens anteriores para as variáveis ao longo de Y;
- Aplicação da transformação inversa de atuação, eq. (4.13);
- Limitação do sinal de controle;
- Cálculo dos sinais de referência de corrente, com a superposição das componentes rotacionais (para o campo girante) e translacionais (para o posicionamento radial);

A implementação da lei de controle do PD é obtida a partir da eq. (5.2):

$$G_{cp}(z) = K_{pp} + K_{dp} \left( \frac{z-1}{z} \right) = K_{pp} + K_{dp}(1 - z^{-1}) = \frac{U_p(z)}{E_p(z)} \quad \rightarrow$$

$$u_p(k) = u_{pp}(k) + u_{dp}(k)$$

onde:

$$\begin{cases} u_{pp}(k) = K_{pp} e_p(k) & \text{(ação proporcional)} \\ u_{dp}(k) = K_{dp} [e_p(k) - e_p(k-1)] & \text{(ação derivativa)} \end{cases}$$

## 6.2.5 Controle de correntes

O controle de correntes é bem mais simples e rápido que o anterior. Todas as seis malhas são fechadas em um único ciclo de interrupção, seguindo-se estes passos:

- Leitura sequencial automatizada dos seis canais que sensoriam as correntes do estator;
- Cálculo do erro;
- Cálculo da ação integrativa;
- Limitação da ação integrativa;
- Cálculo da ação proporcional e soma com a parte integrativa;
- Limitação do sinal de controle.
- Todos os cinco itens anteriores são repetidos para cada controlador PI.

A implementação da lei de controle dos controladores PI é obtida a partir da eq. (5.1):

$$G_{cc}(z) = K_{pc} + K_{ic} \left( \frac{z}{z-1} \right) = K_{pc} + \frac{K_{ic}}{1-z^{-1}} = \frac{U_c(z)}{E_c(z)} \quad \rightarrow$$

$$u_c(k) = u_{pc}(k) + u_{ic}(k)$$

onde:

$$\begin{cases} u_{pc}(k) = K_{pc} e_c(k) & \text{(ação proporcional)} \\ u_{ic}(k) = u_{ic}(k-1) + K_{ic} e_c(k) & \text{(ação integrativa)} \end{cases}$$

Notam-se as formas simples das leis de controle tanto para as correntes do estator quanto para a posição do rotor. Esta é a vantagem de se usar a aproximação clássica para a definição dos tipos de controladores: pouco tempo de computação é necessário para estas partes do programa.

## 7 *Resultados Experimentais*

### 7.1 Correntes no estator

O controle de correntes apresentou algumas inconveniências quando implementado exatamente de acordo com os parâmetros projetados. As correntes não seguiam adequadamente as referências impostas. Duas anomalias foram detectadas:

1. O tempo morto necessário para a comutação dos IGBT's nos braços inversores cria uma não-linearidade quando a corrente controlada por eles se aproxima de zero;
2. A tensão nula não acontece em 50% do ciclo de trabalho para cada braço inversor: varia em uma faixa de 42 a 65%, dependendo do braço.

As soluções encontradas para contornar estes problemas foram:

1. Aumentar o ganho da ação integrativa dos controladores, compensando eventuais pequenas não-linearidades; o novo ganho integrativo aplicado foi de:  $K_{ic}^* = \frac{30}{8}$  ;
2. Somar deslocamentos diversos às saídas, nos sinais PWM, de modo a tornar os sinais de controle simétricos em relação às tensões zero; foi necessário alimentar cada bobina individualmente para calibrar suas referências nulas. Não se sabe ainda a causa desta disparidade.

A partir disso, seguem diversos resultados obtidos. O primeiro deles é a resposta a um degrau na referência, imposta sobre uma das bobinas (figura 30).

Outro resultado a ser mostrado é o acompanhamento de uma referência de corrente senoidal alternando-se a 60 Hz (figura 31). Este teste foi feito com a centralização do rotor ativada. Por isso a referência não segue a forma de uma senóide ideal: existem os desbalanceamentos para o posicionamento radial.

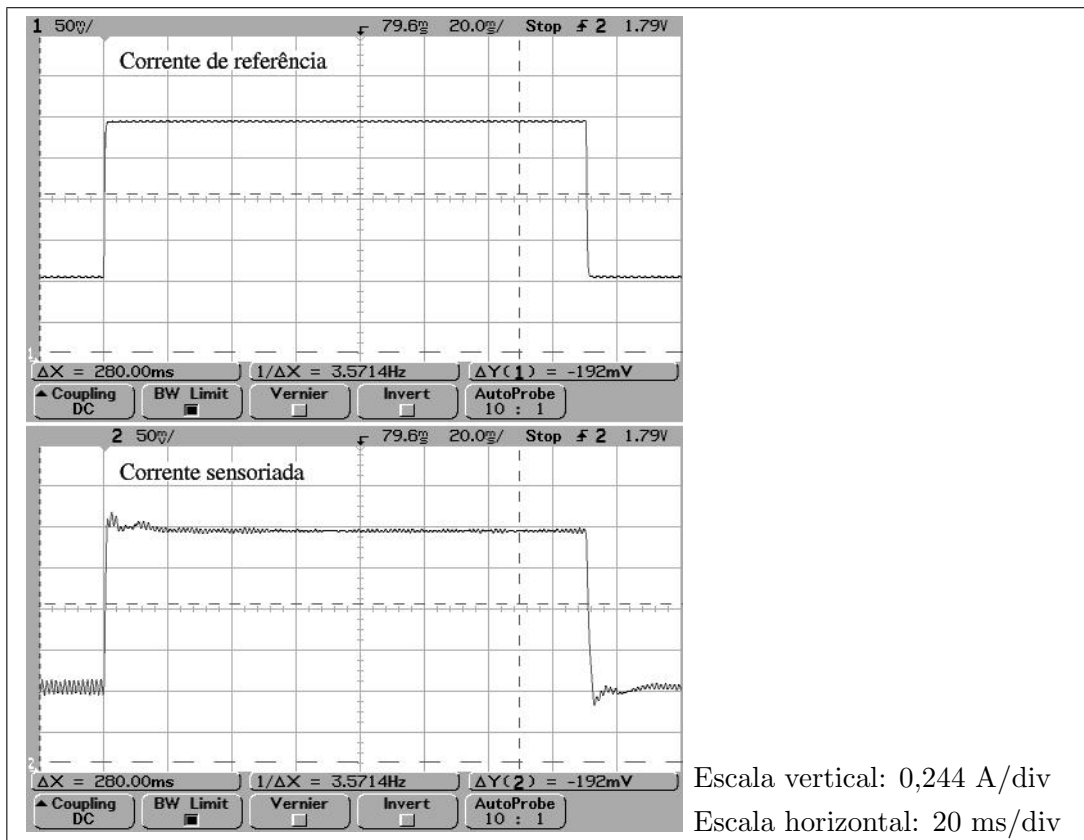


Figura 30: Resposta ao degrau para a corrente em uma das bobinas do estator.

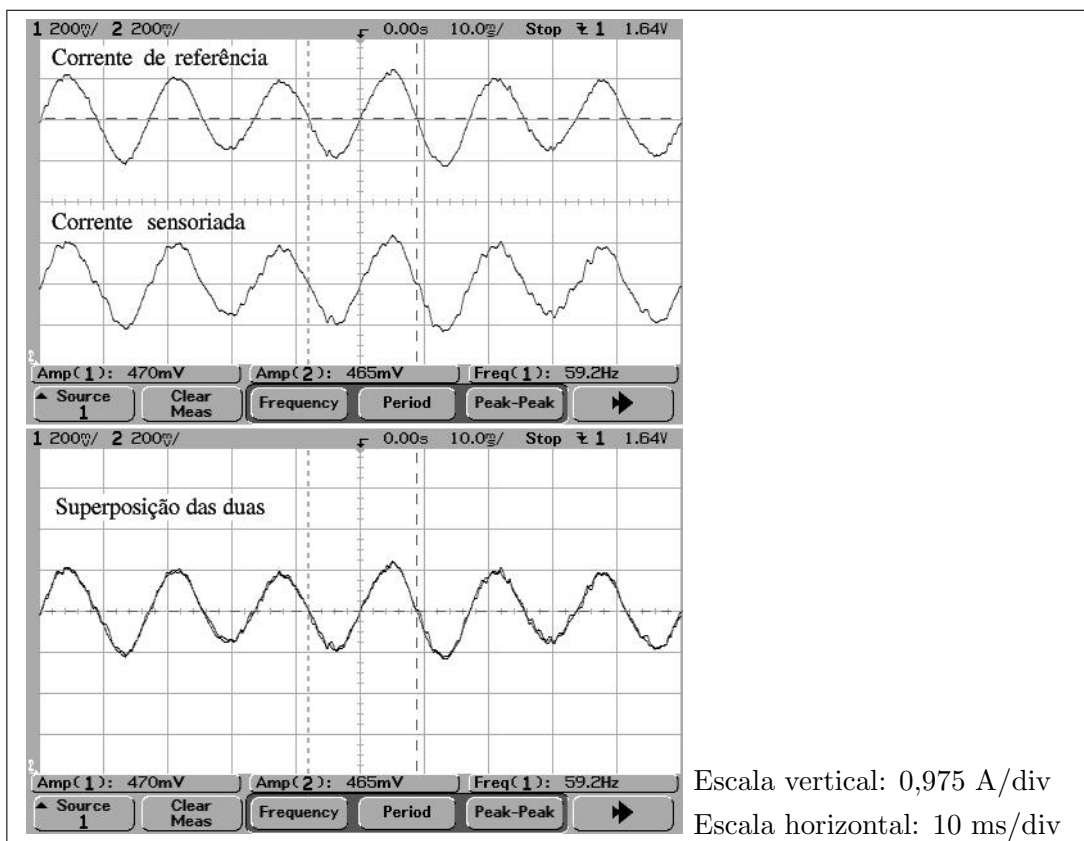


Figura 31: Onda senoidal de 60 Hz em uma das bobinas do estator

Estes resultados demonstram o bom desempenho alcançado pelo controle de correntes sobre o estator. Verifica-se que as correntes medidas seguem corretamente as referências de comando.

## 7.2 Posição radial do rotor

O motor foi acionado com sucesso após alguns ajustes sobre os parâmetros dos controladores de posição. Estas mudanças foram realizadas experimentalmente, observando-se alterações no padrão de deslocamento do rotor sendo controlado. Os valores ficaram ajustados em:

$$\begin{cases} K_{pp} = \frac{9}{128} = 0,0703 \\ K_{dp} = \frac{50}{64} = 0,781 \end{cases}$$

Comparando com os ganhos projetados no capítulo 5, p. 42, nota-se que os ajustes necessários não foram muito grandes.

Para se visualizar o deslocamento do rotor, as duas tensões dos sensores de posição são plotadas em um plano cartesiano através de um osciloscópio. A figura 32 mostra um círculo obtido a partir da varredura do rotor ao longo do limite mecânico, onde ele está confinado pelo rolamento de segurança.

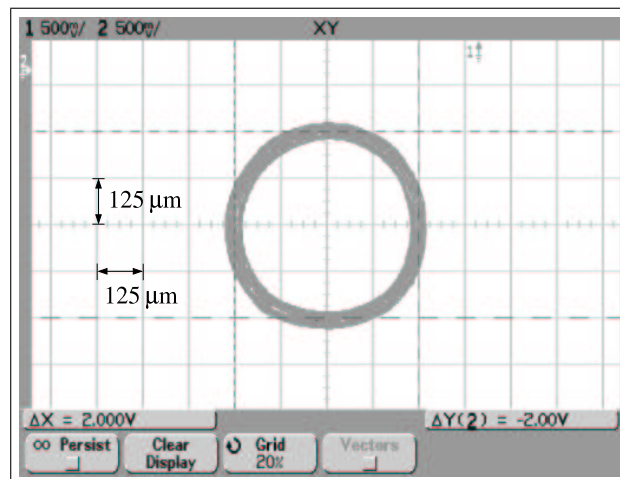


Figura 32: Limite mecânico imposto ao deslocamento lateral do rotor

Para aplicar os testes sobre o lado frontal, a parte traseira do rotor foi fixada parcialmente, pelo preenchimento da folga existente com fita adesiva. Somente um lado do rotor recebeu os circuitos elétricos mostrados no esquema 46, p. 78. O protótipo permite que facilmente se invertam os pacotes magnéticos do rotor em relação aos do estator.

Assim, pode-se testar o desempenho da máquina com e sem bobinado no rotor e verificar a influência destes circuitos com relação à estabilidade do sistema.

### 7.2.1 Resposta ao degrau

As figuras desta seção mostram a resposta do sistema a variações do tipo degrau. Para isso, a compensação automática do peso foi desabilitada e fixada manualmente de modo a eliminar sua influência nos resultados. Ou seja, aqui somente a ação proporcional e a derivativa estão atuando, assim como previsto na etapa de projeto dos controladores. E também as correntes nas três fases foram mantidas em valores estacionários ao se impor uma frequência de rotação nula para o campo girante.

A figura 33 mostra as respostas ao degrau ao longo das direções X e Y, junto com as referências, possibilitando estimar o erro em regime. Não se pode comparar estes resultados com a resposta simulada no capítulo 5 porque os parâmetros de controle sofreram pequenos ajustes empíricos, a partir dos valores obtidos na etapa de projeto.

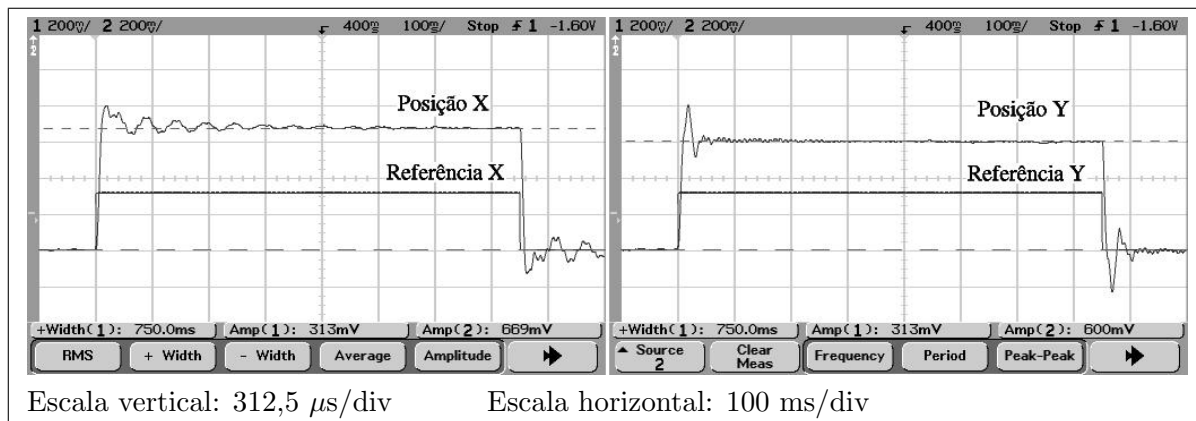


Figura 33: Resposta a uma variação em degrau para o controle radial ao longo de X e Y

O valor dos erros em regime permanecem na mesma ordem de grandeza. No entanto, observa-se que os comportamentos transitórios não estão muito semelhantes entre si. Esperava-se um comportamento análogo, tendo-se usado inclusive os mesmos parâmetros para os dois controladores. A presença da força peso, que está aplicada quase que totalmente ao longo da direção Y, pode estar contribuindo para esta diferença. E também a força magnética sobre o rotor varia de acordo com eventuais excentricidades nele, as quais não foram previstas pelo modelo teórico.

Na figura 34 estão plotadas as respostas ao longo de ambas direções, variando-se a referência em somente uma delas. Com este resultado pode-se observar a influência

cruzada entre os dois eixos de controle.

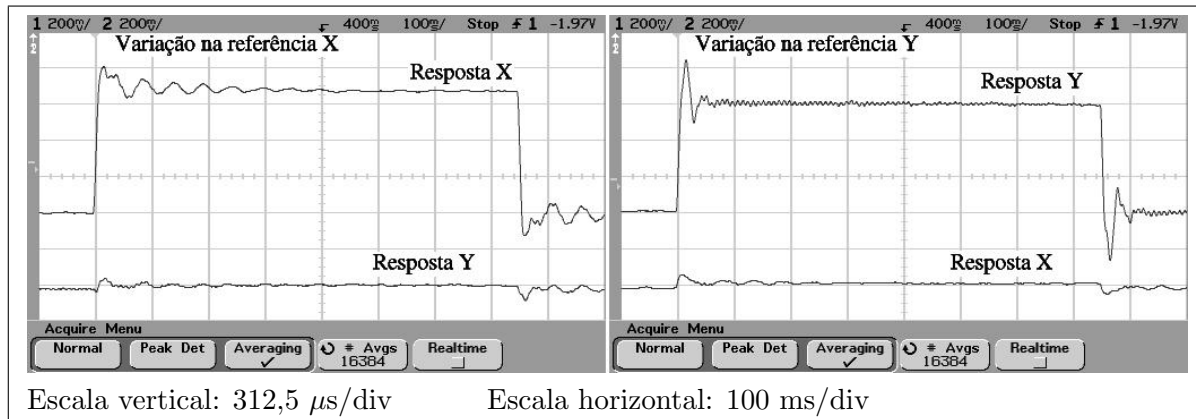


Figura 34: Influência entre os sistemas de controle de posição ao longo de X e Y

Verifica-se que existe interferência, mas ela é pequena. Confirma-se assim a utilidade da simplificação assumida para a força magnética na equação (4.18), p. 30.

## 7.2.2 Área de dispersão do posicionamento

Os gráficos mostrados nesta seção confirmam o sucesso do posicionamento do rotor no centro da máquina. Ele mantém-se levitando, sem tocar os limites laterais. Ou seja, elimina-se o atrito mecânico entre as partes girante e fixa.

A mancha no centro das figuras representa as posições por onde o rotor passou em algum determinado momento: o osciloscópio está em modo de retenção do traço. Os riscos pretos ao centro representam a trajetória mais recente percorrida pelo rotor nos instantes anteriores ao congelamento da imagem.

Os testes iniciais foram realizados com o lado do rotor sem bobinas. Um deles está exemplificado na figura 35. As referências trifásicas foram fixadas com uma frequência nula de variação. Vê-se aí que o rotor permanece dentro de uma pequena área orbital. E isto possibilita a partida do sistema em rotação nula. Verificou-se que o comportamento é praticamente o mesmo para o lado do rotor contendo os circuitos de torque, o que confirma a teoria exposta na seção 2.4, p. 8.

No resultado da figura 36 é o lado do rotor com bobinas que está sendo usado (veja as figuras 1 e 7). Ele é acionado com duas velocidades de campo girante: 15 e 60 Hz. Durante o regime sem carga o sistema se comporta bem: o rotor não toca os limites máximos. Nos instantes de aceleração ocorrem algumas desestabilizações, pois as correntes induzidas no rotor influenciam a configuração do campo: as forças radiais não mais seguem

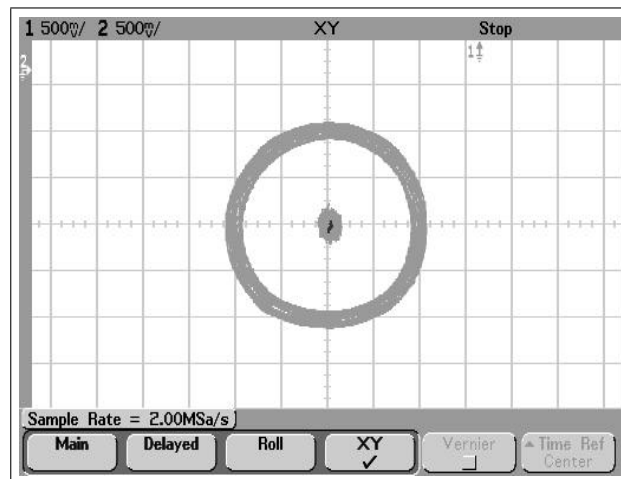


Figura 35: Área de dispersão do rotor para o campo fixo - rotor sem bobinas

estritamente o campo referenciado ao estator. Isto indica que para utilizar o torque do motor, é necessário desenvolver um modelo baseado no campo resultante interno e não nas correntes do estator (CHIBA et al., 1997; CHIBA; YOSHIDA; FUKAO, 1998; SUZUKI et al., 1999; SANTISTEBAN; STEPHAN, 1999a, 1999b).

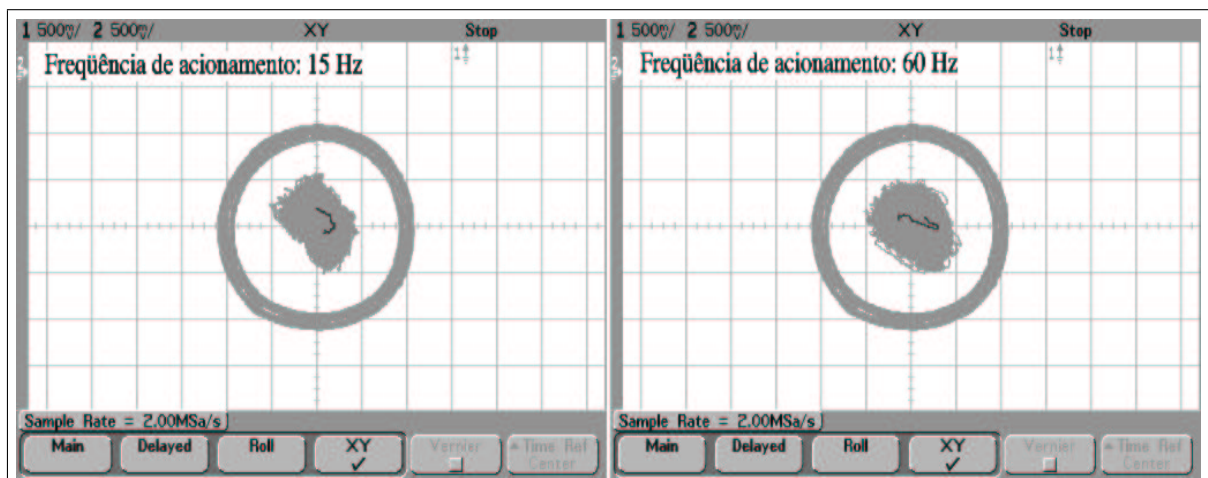


Figura 36: Áreas de dispersão do rotor para acionamentos em 15 e 60 Hz

Até aqui foi mostrada a variação da posição do rotor em um plano cartesiano. Também é interessante visualizar esta característica em função do tempo. A figura 37 é a plotagem dos sinais de ambos os sensores de posição durante meio segundo.

Ao menos no sinal do sensor Y nota-se uma perturbação periódica. Esta repetibilidade permite ao osciloscópio armazenar a média de várias aquisições, fixando assim o padrão mais freqüente de deslocamento radial. Este resultado sobre a média está plotado na figura 38.

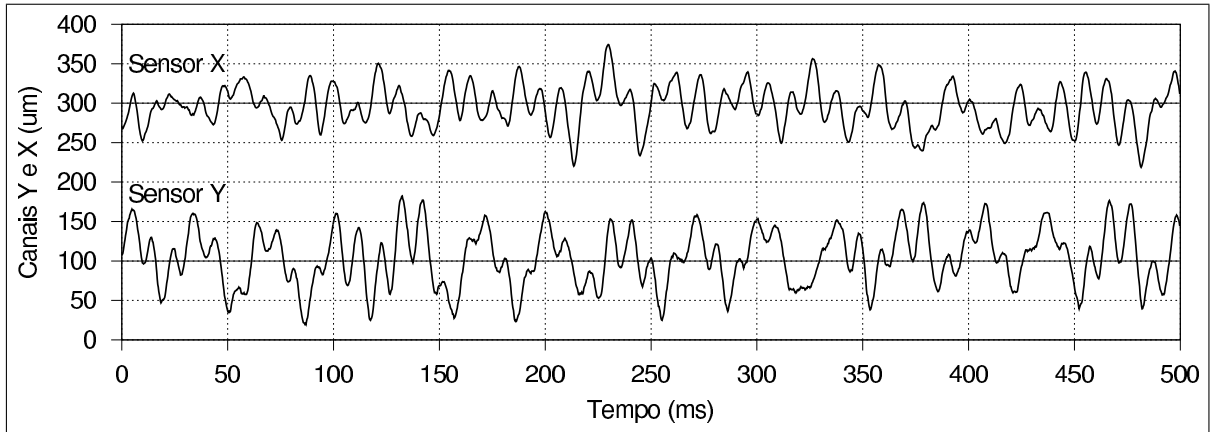


Figura 37: Deslocamentos radiais do rotor acionado em 60Hz

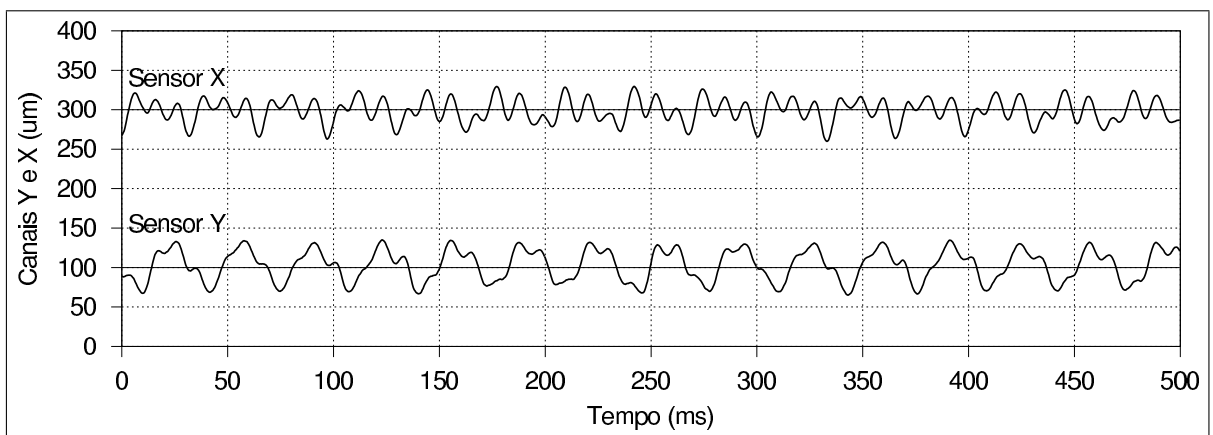


Figura 38: Deslocamentos radiais médios do rotor acionado em 60Hz

E ao analisar o espectro destes sinais (figura 39), notam-se perturbações presentes em: 28, 60, 94 e 120 Hz.

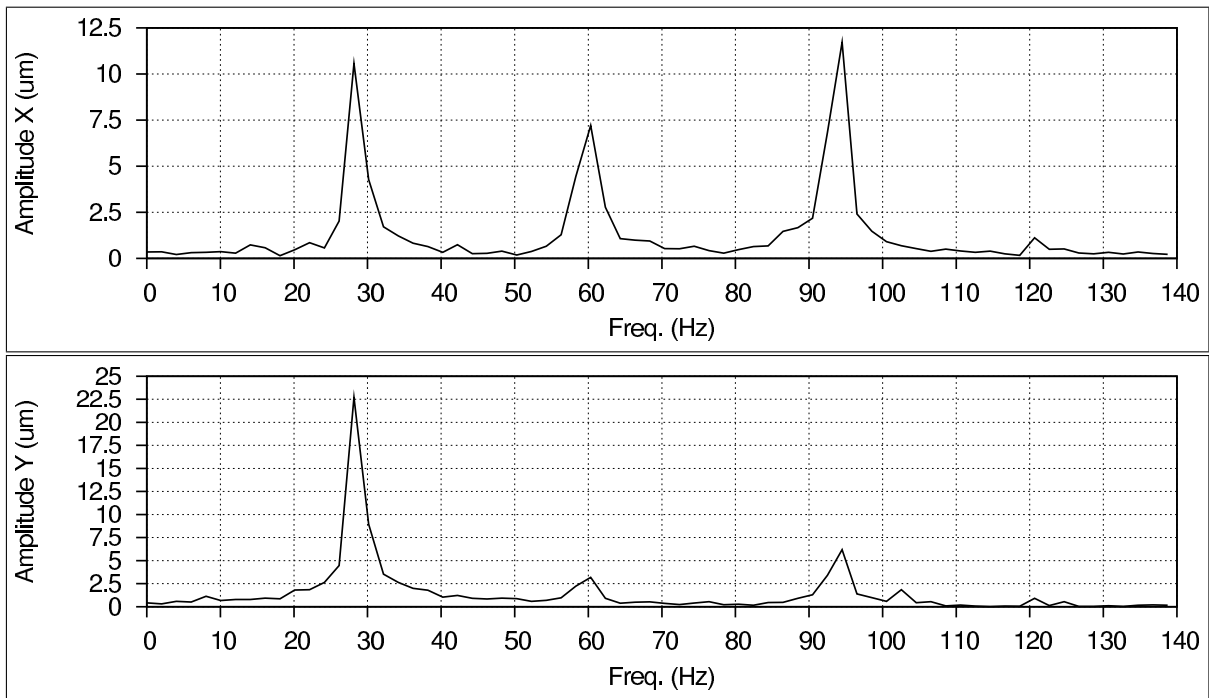


Figura 39: Espectro de frequências dos deslocamentos radiais médios

O motor foi alimentado em 60 Hz, mas como ele tem quatro pólos, sua frequência mecânica síncrona fica sendo a metade disso. As perturbações em 28 Hz são a indicação de sua velocidade de rotação real, com um pequeno escorregamento. As componentes em 60 e 120 Hz são dadas pelas perturbações inseridas pelo campo girante. E aquelas em 94 Hz podem ser resultado de uma complexa combinação das perturbações anteriores sobre a dinâmica do sistema.

A grande área de dispersão para o deslocamento do rotor pode ser explicada por:

1. Excentricidades no rotor e/ou disco de sensoriamento;
2. Desempenho do controle de correntes longe do ideal;
3. Ruído nos sinais realimentados;
4. Baixa resolução do sinal de atuação para a pequena corrente de magnetização do motor;
5. Interferência cruzada entre as forças nas duas direções de controle;
6. Influência de termos pulsantes na equação da força.

Dentre estas, as quatro primeiras causas podem ser mais facilmente tratadas, com a obtenção de melhorias significativas ao se amenizar seus efeitos negativos sobre a malha de realimentação para o posicionamento radial.

### 7.2.3 Desbalanceamento das correntes

Procura-se nesta parte analisar as correntes impostas ao estator durante o acionamento do motor em 60 Hz, sem carga. Chega-se à sua decomposição em: correntes principais de magnetização e correntes de posicionamento radial (desbalanceamento).

Inicialmente, observam-se todas as correntes impostas durante o funcionamento do sistema, por alguns minutos. Acumulam-se os pontos mais freqüentes, eliminando os ruídos dos sinais. Isto está mostrado na figura 40.

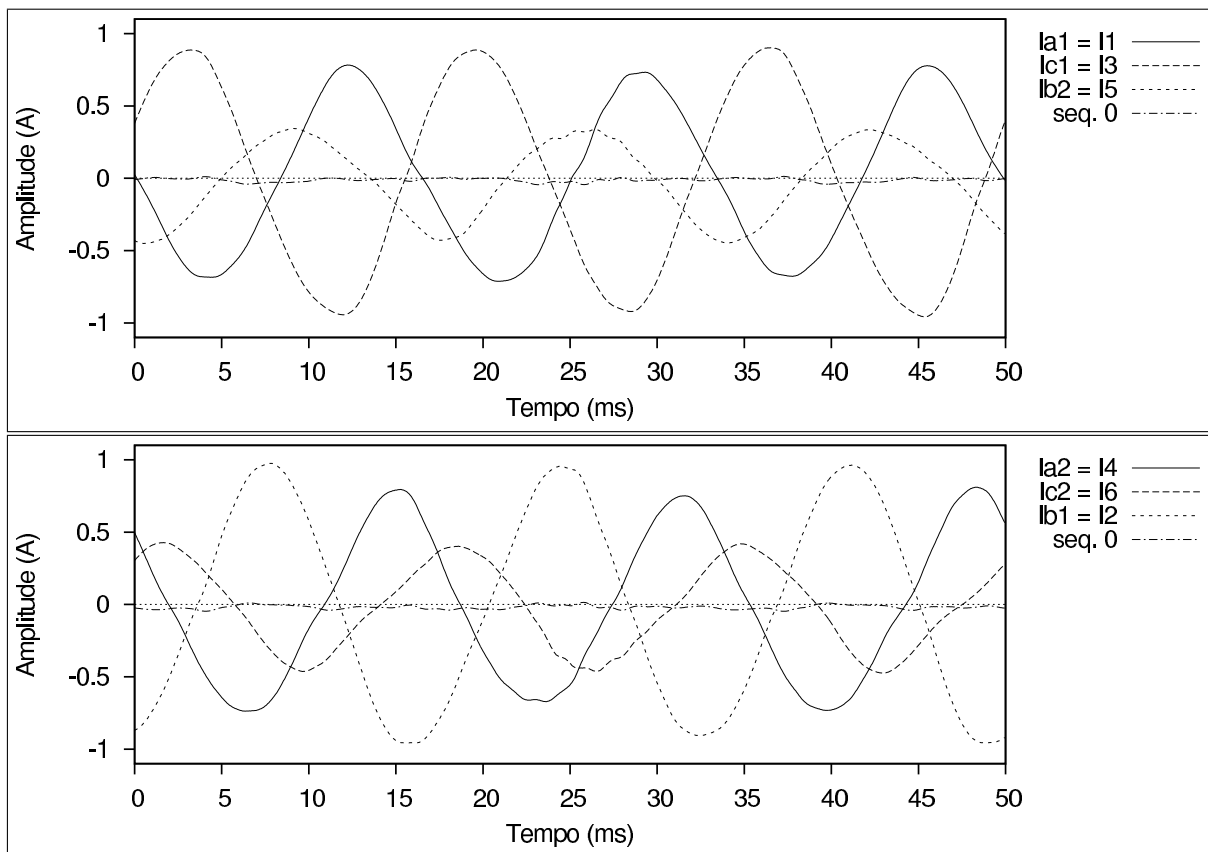


Figura 40: Correntes no estator, acionamento a 60 Hz

A média entre as correntes de grupos de bobinas opostas resulta na componente principal da corrente de magnetização da máquina. E a metade da diferença é o sinal de desbalanceamento aplicado ao par de bobinas opostas pelo controlador de posição. Esta decomposição está plotada na figura 41. Nestes gráficos, as correntes principais no estator

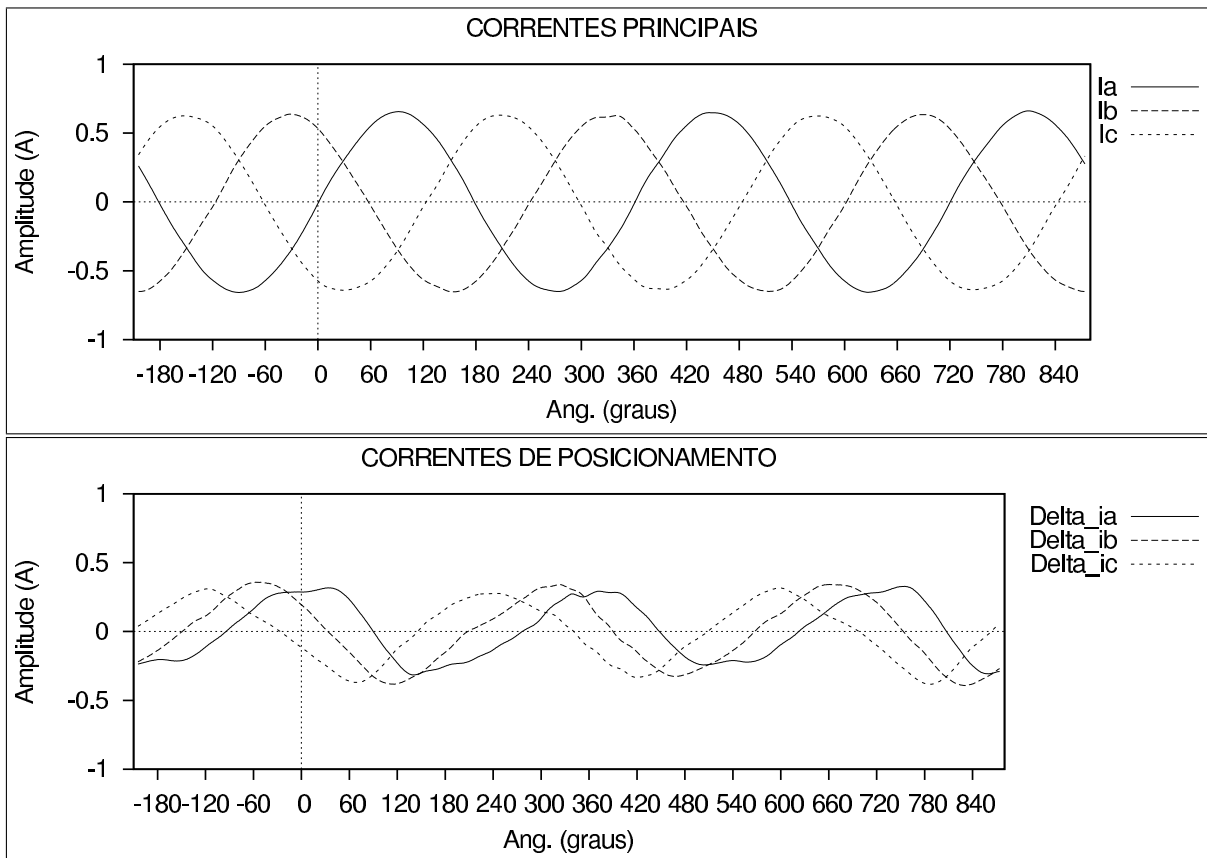


Figura 41: Decomposição das correntes para o acionamento a 60 Hz

mostram-se bem equilibradas. Já a parte das correntes responsáveis pela geração de forças radiais varia mais ruidosamente. Pode-se transformar novamente estas para a referência fixa da carcaça e recuperar os sinais de controle de posição, que estão plotados na figura 42. Para isso aplica-se a transformação direta dada pela eq. (4.10), p. 27, lembrando de normalizá-la para que não se altere o valor das amplitudes:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_x \\ \Delta i_y \end{bmatrix} = \frac{1}{12 I_m} \mathbf{T}_d \begin{bmatrix} \Delta i_a \\ \Delta i_b \\ \Delta i_c \end{bmatrix}$$

Esta nada mais é do que a inversão da eq. (4.11), p. 28.

Na figura 42 também estão mostradas as médias das correntes de controle para cada direção. Seus valores são:

$$\begin{cases} \overline{\Delta i_x} \simeq 0,0057 \text{ A} \\ \overline{\Delta i_y} \simeq 0,313 \text{ A} \end{cases}$$

Somente ao longo da direção Y existe uma componente média significativa. Esta é a componente de equilíbrio contra a força peso que atua no rotor. Sua ordem de grandeza

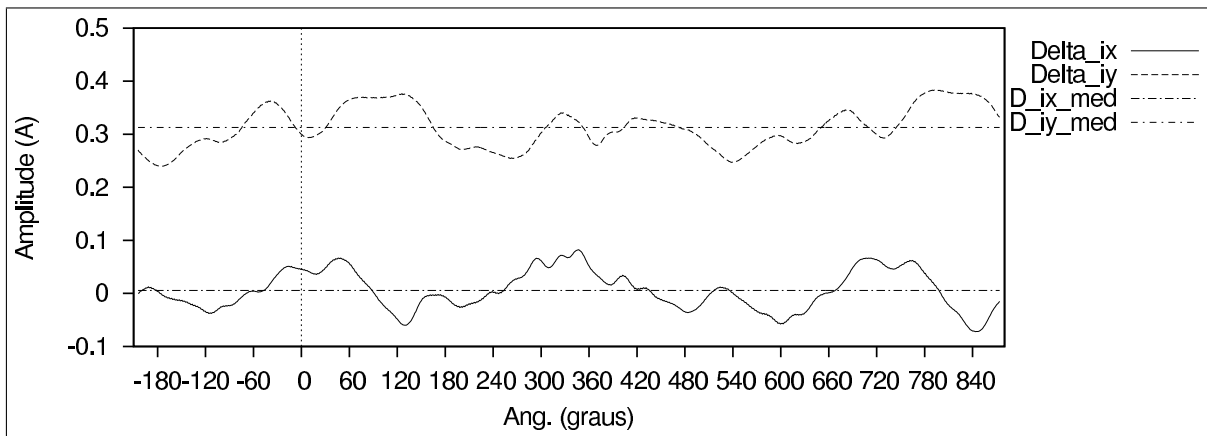


Figura 42: Correntes de controle de posição radial, na referência estacionária

é a mesma que aquela do valor estimado pela eq. (4.15):

$$\overline{\Delta i_{y(cal)}} = \frac{m_r g_t}{24 K_1 I_m} \simeq 0,209 \text{ A}$$

onde a aceleração gravitacional adotada é de  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Os outros parâmetros são tomados do apêndice B.

## 7.2.4 Potência de controle radial

O total de perdas em um sistema de conversão de energia é uma característica muito importante a ser considerada. Estimam-se aqui as perdas do motor em vazio para uma frequência de acionamento igual a 60 Hz e com o rotor levitando.

Primeiramente, calcula-se a potência dissipada nas resistências dos enrolamentos do estator devida aos desbalanceamentos impostos pela centralização do rotor. Este cálculo é efetuado a partir das resistências dos enrolamentos do estator e das correntes que passam por elas. A medição do valor médio dessas resistências está indicada no apêndice B. E as correntes são obtidas dos dados mostrados nos gráficos 40 e 41.

Fazendo-se um balanço para as perdas no cobre, tem-se:

$$P_{te} = P_{me} + P_{le}$$

onde:

$P_{te}$  são as perdas totais no cobre devidas às correntes de magnetização e de levitação combinadas.

$P_{me}$  são as perdas no cobre pelas correntes de magnetização.

$P_{te}$  são as perdas no cobre pelas correntes de levitação.

Para obter o termo  $P_{te}$  usam-se as correntes reais que passam pelo estator, mostradas na figura 40 e representadas na tabela 1 por seus valores eficazes.

Tabela 1: Potências dissipadas nos enrolamentos do estator

Bobina	Resistência ( $\Omega$ )	Corrente (A)	Potência (W)
1	1,903	0,5020	0,4796
2	1,903	0,6721	0,8597
3	1,903	0,6453	0,7924
4	1,903	0,5156	0,5059
5	1,903	0,2659	0,1345
6	1,903	0,2929	0,1633

Nesta tabela estão calculadas as perdas por efeito Joule sobre cada uma das resistências dos enrolamentos do estator, que foram todas consideradas iguais. Somando-se essas perdas chega-se ao seguinte resultado:

$$P_{te} \simeq 2,935$$

Já a parcela  $P_{me}$  é calculada com as correntes principais da figura 41, que são as correntes de magnetização, sem o desbalanceamento. A tabela 2 resume os valores eficazes destas correntes e as potências correspondentes dissipadas em cada bobina do estator.

Tabela 2: Potências dissipadas nos enrolamentos do estator, pelas correntes de magnetização

Bobina	Resistência ( $\Omega$ )	Corrente (A)	Potência (W)
1	1,903	0,4621	0,4063
2	1,903	0,4518	0,3884
3	1,903	0,4532	0,3909
4	1,903	0,4621	0,4063
5	1,903	0,4518	0,3884
6	1,903	0,4532	0,3909

Somando-se todas as potências, tem-se o valor das perdas devidas às correntes principais de magnetização:

$$P_{me} \simeq 2,371$$

A potência de controle radial dissipada nos enrolamentos do estator é então a diferença entre as duas anteriores:

$$P_{le} = P_{te} - P_{me} \simeq 0,5640 \text{ W}$$

Para a perda total no sistema em vazio, aplica-se um procedimento mais abrangente, medindo a corrente média e a tensão contínua diretamente na entrada do barramento CC dos inversores, assim como indicado na figura 43. O produto entre estas duas grandezas iguala-se à potência eficaz porque a tensão contínua dos inversores é praticamente constante.

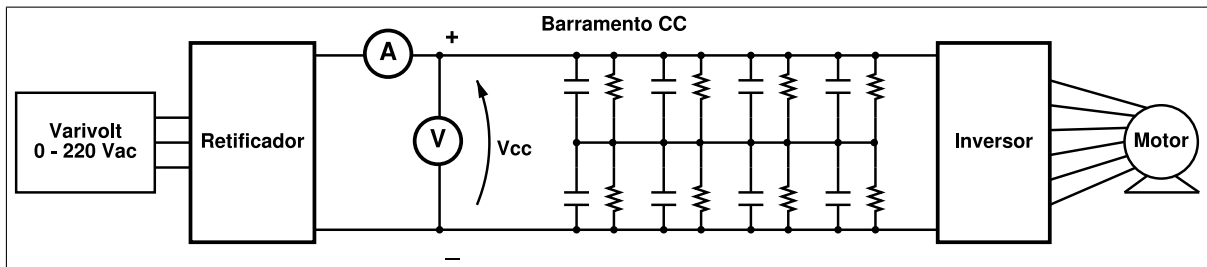


Figura 43: Medição da potência de entrada do sistema

A corrente média lida foi igual a 0,28 A. Descontando-se 4 W das resistências em paralelo com o barramento CC, calcula-se o valor para as perdas totais em vazio:

$$P_{tv} \simeq (200 \cdot 0,28) - 4 \simeq 52 \text{ W}$$

Comparando-se os dois resultados,  $P_{le}$  e  $P_{tv}$ , observa-se que as perdas de levitação magnética são da ordem de grandeza desprezível em relação às perdas totais em vazio (perdas no ferro):  $P_{le} \simeq \frac{1}{100} \cdot P_{tv}$

## 7.2.5 Conclusões

A modelagem da força magnética radial é muito importante para se entender quais parâmetros influenciam na estabilização do sistema. Apesar das características dinâmicas reais não terem confirmado a resposta prevista pelo modelo, este foi útil como base para a definição da estrutura de controle. E as características estáticas previstas ficaram na mesma ordem de grandeza que aquelas medidas sobre o protótipo. Algum método de identificação deve ser aplicado para se avaliar melhor a utilidade do modelo simples que foi calculado. Em engenharia prefere-se medir ao invés de estimar. No entanto, a falta de equipamentos especializados é um obstáculo para se seguir este caminho.

Vários testes foram realizados para verificar a faixa de frequências de acionamento aceitáveis para o protótipo. Ela estende-se continuamente de  $-90$  a  $90$  Hz (inclusive a frequência nula). As frequências negativas representam inversão no sentido da rotação. Com isso, fica provado que a estrutura com bobinado dividido para o motor de indução

sem mancais é adequada para o acionamento desde 0 até a rotação nominal de uma máquina convencional: basta usar o esquema de atuação indicado pelas equações (4.6), (4.11) e (4.13), no capítulo 4.

Para diminuir a área de dispersão em que o rotor se mantém, diversos aspectos técnicos de implementação ainda podem ser ajustados e melhorados, assim como indicado na seção 7.2.2. Apesar disso, o sistema estudado já apresentou resultados relevantes, pois a levitação magnética do rotor foi realizada plenamente.

A potência requerida para a tarefa de levitação magnética é pequena em relação àquela necessária para manter o fluxo principal da máquina. No entanto, quando carga mecânica é aplicada ao eixo, aumenta-se a corrente do motor. Conseqüentemente, aumentam as perdas no cobre. Por isso é importante manter as resistências dos enrolamentos do estator as mais baixas possíveis. A estrutura de bobinado dividido não altera o valor dessas resistências, pois o mesmo esquema de bobinagem de um motor convencional é usado para o estator.

Falta ainda adaptar o esquema de posicionamento do rotor para trabalhar em conjunto com uma estrutura de controle rotacional. Isso permitirá verificar a influência dos desbalanceamentos de corrente sobre o torque. E utilizar realmente a principal função da máquina, que é a conversão eletromecânica de energia.

## *8 Perspectivas de Desenvolvimento*

Após a conclusão deste trabalho, resta indicar os caminhos a serem seguidos na continuação da pesquisa. O primeiro e de maior impacto relaciona-se à introdução dos conceitos de controle vetorial de fluxo e torque, associados ao controle de posição do rotor. O sistema estudado aqui não levou em consideração cargas mecânicas aplicadas ao eixo. Ou seja, trabalhou-se sem as componentes de fluxo geradas pela reação do rotor. A partir dos resultados mostrados aqui, deve-se agregar as técnicas de controle vetorial para estabilizar o sistema, independentemente de haver ou não torque no eixo.

A partir disso, pode-se antever diversas possibilidades de desenvolvimento:

- Estudar uma maneira de se manter os desbalanços alinhados com o fluxo do entreferro, ao invés de referenciados ao estator.
- Estudar as características de torque com relação aos desequilíbrios impostos pelo posicionamento do rotor, considerando na modelagem da máquina os desbalanceamentos de correntes.
- Reduzir o número de controladores de corrente.
- Usar a modulação PWM vetorial, diminuindo as perdas por chaveamento.

Mais possibilidades para continuar a pesquisa são a aplicação de técnicas diversas de controle além do clássico controlador proporcional-derivativo mostrado neste trabalho. E também estudar o acoplamento mecânico existente entre os dois lados da máquina ao se suspender ambos ao mesmo tempo. Finalmente, o último passo seria tornar o sistema mais compacto e confiável, para poder ser aplicado industrialmente.

## *Referências*

- ASTRÖM, K.; WITTENMARK, B. *Computer Controlled Systems - Theory and Design*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1990.
- BOLDRINI, J.; COSTA, S.; FIGUEIREDO, V.; WETZLER, H. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harper and Row do Brasil, 1980.
- CHEN, C. *Linear System Theory and Design*. 3. ed. New York: Oxford, 1999.
- CHIBA, A.; DEIDO, T.; FUKAO, T.; A., R. M. An analysis of bearingless ac motors. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 9, n. 1, p. 61–68, March 1994.
- CHIBA, A. et al. Stable operation of induction type bearingless motors under loaded conditions. *IEEE Transactions on IAS*, v. 33, n. 4, p. 919–924, July 1997.
- CHIBA, A.; MIYATAKE, R.; HARA, S.; FUKAO, T. Transfer characteristics of radial force of induction type bearingless motors with four pole rotor circuits. In: *ISMB*. Japan: [s.n.], 1996. p. 319–325.
- CHIBA, A.; POWER, D. T.; RAHMAN, M. A. Characteristics of a bearingless induction motor. *IEEE Transactions on Magnetics*, p. 5199–5201, September 1991.
- CHIBA, A.; SALAZAR, A. O. Comparison between two winding system (tws) and split winding system (sws) in induction bearingless machine. In: *IV Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*. Brasil: SBMag, 2000.
- CHIBA, A.; YOSHIDA, K.; FUKAO, T. Transient response of revolving magnetic field in induction type bearingless motors with secondary resistance variations. In: *ISMB*. USA: [s.n.], 1998. p. 461–475.
- D'AZZO, J.; HOUPIS, C. *Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.
- DORF, R. C. *Modern Control Systems*. 4. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 1986.
- EL-HAWARY, M. *Principles of Electric Machines with Power Electronic Application*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1986.
- FERREIRA, J. M. de S. *Proposta de máquina de indução trifásica sem mancal com bobinado dividido*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Abril 2002.
- FERREIRA, J. M. de S.; PAIVA, J. A. de; SALAZAR, A. O.; CASTRO, F. E. F. de; LISBÔA, S. N. D. Dsp utilization in radial positioning control of bearingless machine. In: *ISIE'03*. [S.l.: s.n.], 2003. v. 1, p. 312–317.

- GRANVILLE, W.; SMITH, P.; LONGLEY, W. *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*. Rio de Janeiro: Âmbito Cultural, 1992.
- HAYT JR, W. H. *Eletromagnetismo*. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1994.
- ISERMANN, R. *Digital Control Systems - vol.1: Fundamentals, Deterministic Control*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1989.
- KOWALIK, J.; OSBORNE, M. *Methods for Unconstrained Optimization Problems*. New York: Elsevier, 1968.
- ONG, C. *Dynamic Simulation of Electric Machinery*. Upper Sadle River: Prentice-Hall, 1998.
- PAIVA, J. A. de; FERREIRA, J. M. de S.; SALAZAR, A. O.; CASTRO, F. E. F. de; LISBÔA, S. N. D. Dsp implementation for the drive and positioning control of a bearingless machine. In: *COBEP'2003*. [S.l.]: SOBRAEP, 2003. p. 220–224.
- RAHMAN, M. A.; FUKAO, T.; CHIBA, A. Principles and developments of bearingless ac motors. In: *IPEC*. Japan: [s.n.], 1995. v. 3, p. 1334–1339.
- SALAZAR, A. O.; FERREIRA, J. M. de S.; CASTRO, F. E. F. de. Analysis of a bearingless three phase induction machine. In: *INTERMAG*. [S.l.: s.n.], 2003.
- SALAZAR, A. O.; STEPHAN, R. M. A bearingless method for induction machine. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 29, n. 6, p. 2965–2967, November 1993.
- SALAZAR, A. O.; STEPHAN, R. M.; DUNFORD, W. An efficient bearingless induction machine. In: *COBEP*. Brazil: [s.n.], 1993. p. 419–424.
- SANTISTEBAN, J. A.; STEPHAN, R. M. Analysis and control of a loaded bearingless machine. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 35, n. 5, p. 3998–4000, September 1999.
- SANTISTEBAN, J. A.; STEPHAN, R. M. Modeling and analysis on a loaded bearingless machine. In: *EPE'99*. Lausanne: [s.n.], 1999.
- SHELTER, W. *MAXIMA 5.6*. 1998. GNU Public License. Computer algebra system. Disponível em: <<http://maxima.sourceforge.net>>.
- SCHWEITZER, G.; BLEULER, H.; TRAXLER, A. *Active Magnetic Bearings: Basics, Properties and Applications*. [S.l.]: VDF, 1994.
- SUZUKI, T.; CHIBA, A.; RAHMAN, M.; FUKAO, T. An air-gap flux oriented vector controller for stable magnetic suspension during high torque acceleration in bearingless induction motors. *IEEE IAS Conf. Record*, p. 1543–1550, October 1999.

## *Apêndice A – Estrutura do Motor de Indução Sem Mancais*

### **A.1 Estrutura mecânica**

Veja a figura 44.

### **A.2 Momento de inércia do rotor em relação aos pontos de sustentação**

Aqui somente está calculado o momento de inércia em relação a uma das extremidades, pois os dois lados são quase simétricos, o que leva a valores muito próximos ao se considerar os dois pontos de apoio.

O momento de inércia de um cilindro em relação ao eixo transversal que atravessa seu centro é:

$$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$$

onde:

$m$  é a massa do cilindro;

$r$  é o raio do cilindro;

$l$  é a altura do cilindro.

E o Teorema dos Eixos Paralelos também é usado:

$$I_{zz} = I_{xx} + md^2$$

onde:

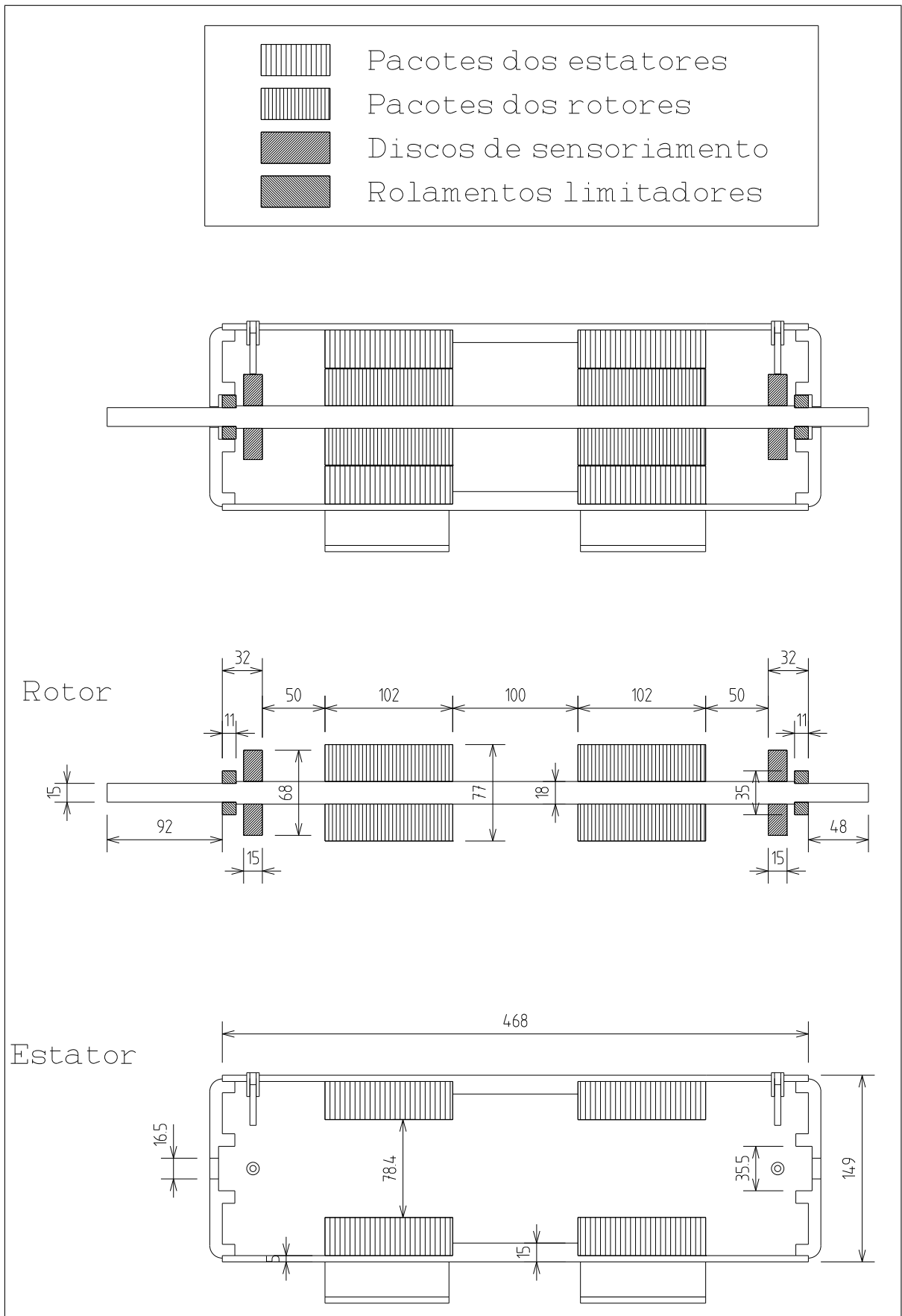


Figura 44: Estrutura mecânica do motor de indução sem mancais

$I_{zz}$  é o momento de inércia em relação ao novo eixo,  $zz$ , o qual é paralelo ao eixo  $xx$  que passa pelo centro de massa;

$d$  é a distância que separa os eixos paralelos  $zz$  e  $xx$ .

Para se chegar ao momento de inércia do rotor, considera-se que ele é composto de várias partes cilíndricas. Faz-se o cálculo sobre estas partes isoladamente, somando-se seus efeitos para obter o momento de inércia total. Pela combinação das duas fórmulas anteriores são calculados os momentos de inércia de cada parte cilíndrica do rotor em relação ao seu mancal de apoio mecânico imaginário:

$$I_Z = m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12} + d^2 \right)$$

A decomposição do rotor para estes cálculos está mostrada na figura 45. Os volumes de cada parte podem ser obtidos a partir das medidas mostradas na fig. 44 da seção anterior. O material para todas as partes é o ferro, com densidade dada por:  $\rho_{Fe} \simeq 4,196 \cdot 10^{-5}$  kg/m<sup>3</sup>. Com o volume e densidade conhecidos, fica fácil obter a massa. Segue a memória de cálculo para todas as partes consideradas, bem como o somatório final.

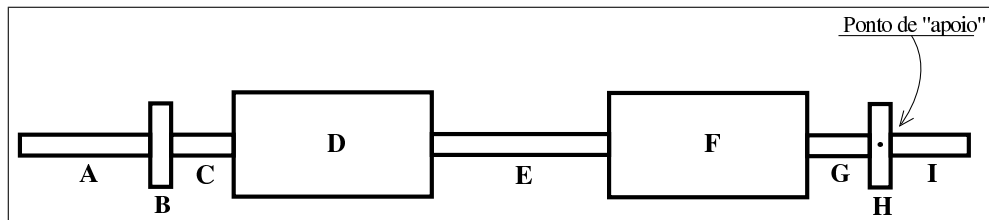


Figura 45: Decomposição do rotor em pedaços cilíndricos

### Parte A

Volume:  $V_A = \pi r^2 h \simeq \pi(0,0075)^2(0,092) \simeq (1,626 \cdot 10^{-5}) \text{ m}^3$

Massa:  $m_A = \rho_{Fe} V_A \simeq (7800)(1,626 \cdot 10^{-5}) \simeq 0,127 \text{ kg}$

Momento de inércia:  $I_A \simeq 0,127 \left( \frac{0,0075^2}{4} + \frac{0,092^2}{12} + 0,4895^2 \right) \simeq 0,0305 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

### Parte B

Volume:  $V_B \simeq \pi(0,034)^2(0,015) \simeq (5,448 \cdot 10^{-5}) \text{ m}^3$

Massa:  $m_B = \rho_{Fe} V_B \simeq (7800)(5,448 \cdot 10^{-5}) \simeq 0,425 \text{ kg}$

Momento de inércia:  $I_B \simeq 0,425 \left( \frac{0,034^2}{4} + \frac{0,015^2}{12} + 0,419^2 \right) \simeq 0,0747 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Parte C**

Volume:  $V_C \simeq \pi(0,009)^2(0,050) \simeq (1,272 \cdot 10^{-5}) \text{ m}^3$

Massa:  $m_C = \rho_{Fe}V_C \simeq (7800)(1,272 \cdot 10^{-5}) \simeq 0,099 \text{ kg}$

Momento de inércia:  $I_C \simeq 0,099 \left( \frac{0,009^2}{4} + \frac{0,050^2}{12} + 0,3865^2 \right) \simeq 0,0148 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Parte D**

Volume:  $V_D \simeq \pi(0,0385)^2(0,102) \simeq (4,75 \cdot 10^{-4}) \text{ m}^3$

Massa:  $m_D = \rho_{Fe}V_D \simeq (7800)(4,75 \cdot 10^{-4}) \simeq 3,705 \text{ kg}$

Momento de inércia:  $I_D \simeq 3,705 \left( \frac{0,0385^2}{4} + \frac{0,102^2}{12} + 0,3105^2 \right) \simeq 0,362 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Parte E**

Volume:  $V_E \simeq \pi(0,009)^2(0,100) \simeq (2,545 \cdot 10^{-5}) \text{ m}^3$

Massa:  $m_E = \rho_{Fe}V_E \simeq (7800)(2,545 \cdot 10^{-5}) \simeq 0,198 \text{ kg}$

Momento de inércia:  $I_E \simeq 0,198 \left( \frac{0,009^2}{4} + \frac{0,100^2}{12} + 0,2095^2 \right) \simeq 0,00886 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Parte F**

Massa:  $m_F = m_D \simeq 3,705 \text{ kg}$

Momento de inércia:  $I_F \simeq 3,705 \left( \frac{0,0385^2}{4} + \frac{0,102^2}{12} + 0,1085^2 \right) \simeq 0,0482 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Parte G**

Massa:  $m_G = m_C \simeq 0,099 \text{ kg}$

Momento de inércia:  $I_G \simeq 0,099 \left( \frac{0,009^2}{4} + \frac{0,050^2}{12} + 0,0325^2 \right) \simeq 0,00013 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Parte H**

Massa:  $m_H = m_B \simeq 0,425 \text{ kg}$

Momento de inércia:  $I_H \simeq 0,425 \left( \frac{0,034^2}{4} + \frac{0,015^2}{12} \right) \simeq 0,00013 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

## Parte I

$$\text{Volume: } V_I \simeq \pi(0,0075)^2(0,048) \simeq (8,482 \cdot 10^{-6}) \text{ m}^3$$

$$\text{Massa: } m_I = \rho_{Fe} V_A \simeq (7800)(8,482 \cdot 10^{-6}) \simeq 0,0662 \text{ kg}$$

$$\text{Momento de inércia: } I_I \simeq 0,0662 \left( \frac{0,0075^2}{4} + \frac{0,048^2}{12} + 0,0485^2 \right) \simeq 0,00017 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$


---

Para encontrar o momento de inércia total, basta somar as contribuições de cada parte:

$$I_{r(\text{calc})} \simeq 0,539 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

A massa do rotor também é totalizada:

$$m_{r(\text{calc})} \simeq 8,85 \text{ kg}$$

Para comparar com o valor teórico, fez-se a seguinte medição da massa do rotor:

$$m_r \simeq 8,135 \text{ kg}$$

Aplicando-se um fator de correção correspondente à relação entre a massa medida e a calculada, chega-se a uma estimativa melhor para o momento de inércia real:

$$I_r \simeq I_{r(\text{calc})} \frac{m_r}{m_{r(\text{calc})}} = 0,539 \frac{8,135}{8,85} \simeq 0,495 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### A.3 Esquema de ligação dos circuitos rotóricos

A figura 46 esquematiza como os 12 circuitos do rotor estão inseridos ao longo de suas 48 ranhuras.

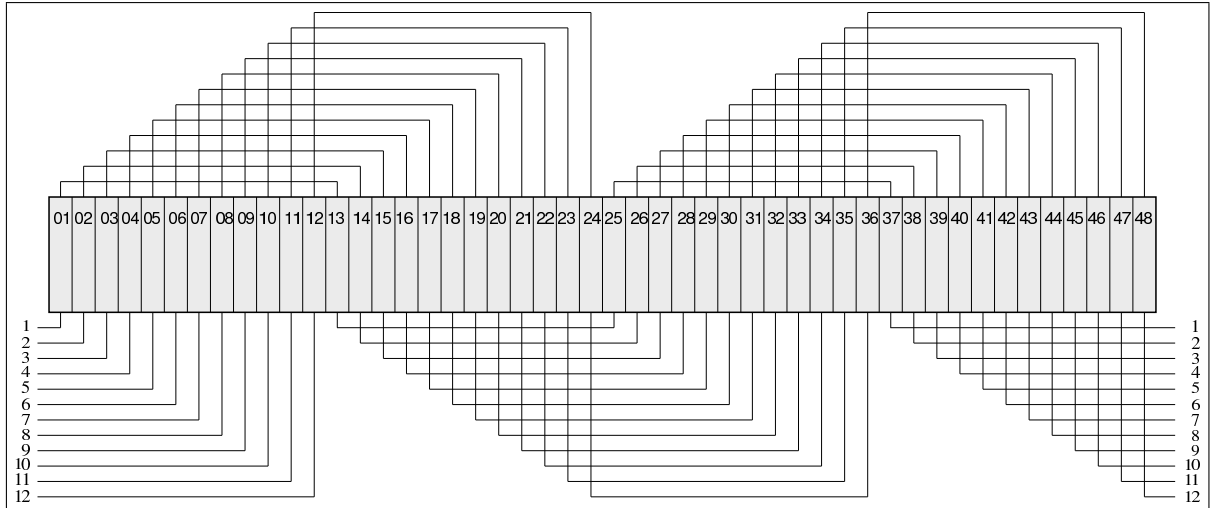


Figura 46: Esquema de ligações dos circuitos elétricos no rotor

## *Apêndice B – Medição de parâmetros*

### **B.1 Sistema de controle de correntes**

#### **B.1.1 Indutâncias próprias das bobinas do estator**

O seguinte método foi aplicado para estimar o valor das indutâncias de magnetização dos enrolamentos do estator:

1. Utiliza-se o rotor sem bobinado para não haver correntes induzidas dentro dele;
2. Fixa-se mecanicamente o rotor no centro. Utiliza-se uma fita adesiva de papel em torno dos rolamentos de segurança, de modo a eliminar suas folgas;
3. Aplica-se uma tensão alternada em cada uma das bobinas e mede-se a corrente que passa por elas;
4. Calcula-se a impedância, desprezando-se as perdas no ferro, ou seja, assume-se que a impedância medida é composta somente por uma reatância indutiva;
5. A partir da reatância indutiva medida obtém-se a indutância, dada a frequência da tensão aplicada: 60 Hz;
6. Toma-se a média entre os seis valores medidos.

É um procedimento bastante simplificador, pois despreza tanto as resistências dos enrolamentos quanto aquela dada pelas perdas no ferro. No entanto, se estas fossem levadas em consideração, o resultado para a indutância não seria tão diferente, embora a complexidade da medição aumentasse muito. Como este parâmetro deve sofrer outras influências durante o funcionamento do sistema, não requer uma exatidão tão grande. O próprio controle de corrente em malha fechada deve minimizar o efeito destas variações.

O resultado vem da tabela 3:

$$L_e \simeq 112 \mu\text{H}$$

Tabela 3: Medição da indutância dos enrolamentos do estator

Bobina	Tensão	Corrente	Impedância	Indutância
1	32,82	0,6868	47,79	0,127
2	26,85	0,6748	39,79	0,106
3	24,53	0,6725	36,48	0,097
4	32,25	0,6732	47,90	0,127
5	25,45	0,6771	37,58	0,100
6	29,20	0,6707	43,54	0,115

### B.1.2 Resistências das bobinas do estator

Aplicam-se correntes contínuas às bobinas e medem-se as tensões sobre elas. Pela Lei de Ohm, calcula-se o valor das resistências diretamente. O resultado é a média dos valores lidos para todas as seis:

Tabela 4: Medição da resistência dos enrolamentos do estator

Bobina	Resistência
1	1,92
2	1,90
3	1,90
4	1,89
5	1,91
6	1,90

$$R_e \simeq 1,903 \Omega$$

### B.1.3 Função de transferência dos sensores de corrente

Para medir os ganhos desses sensores, insere-se uma corrente contínua de 2 A neles e mede-se sua resposta. Inverte-se a polaridade da corrente e mede-se novamente a saída. O ganho é simplesmente a relação entre as duas variações. Pela média entre os seis

Tabela 5: Medição do ganho dos sensores de corrente

Sensor	$V(-2)$	$V(+2)$	$\frac{V(+2)-V(-2)}{4}$
1	1,227	2,047	0,205
2	1,222	2,043	0,205
3	1,220	2,039	0,205
4	1,219	2,040	0,205
5	1,214	2,037	0,206
6	1,225	2,046	0,205

resultados, tem-se:

$$K_{sc} \simeq 0,2052 \text{ V/A}$$

Percebe-se que existe uma variação nos deslocamentos, mas os ganhos são muito semelhantes.

Já a frequência de corte é calculada a partir do circuito na saída do sensor, desenhado na figura 47.

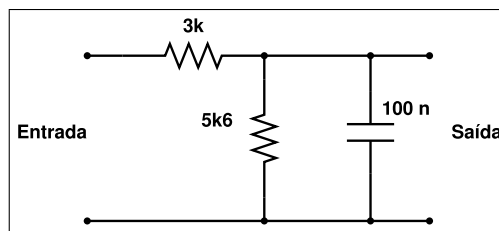


Figura 47: Filtro passa-baixa na saída dos sensores de corrente

A resistência equivalente de Thevenin é:

$$R_{ec} = \frac{3 \cdot 5,6}{3 + 5,6} \cdot 10^3 \simeq 1953 \Omega$$

E a frequência de corte é o inverso da constante de tempo  $RC$ :

$$\omega_{sc} = \frac{1}{1953,5 \cdot 100 \cdot 10^{-9}} \simeq 5119 \text{ rad/s}$$

Portanto, a função de transferência fica assim:

$$H_c(s) \simeq \frac{0,2052}{\frac{s}{5119} + 1}$$

### B.1.4 Tensão contínua do barramento do inversor

A tensão máxima suportada por cada fase do motor foi medida em 50 V. A tensão entre fases é:  $50\sqrt{3} \simeq 86,6 \text{ V}$ . E a tensão de pico requerida é:  $86,6\sqrt{2} \simeq 122,5 \text{ V}$ . Esta é a tensão mínima para o barramento CC. Mas ela deve ainda acomodar os desbalanceamentos do controle de posição. Com uma boa margem de segurança para cima, escolhe-se o seguinte valor:

$$V_{cc} = 200 \text{ V}$$

## B.2 Sistema de controle de posição

Todos as dimensões relevantes para se calcular os parâmetros do modelo para a força magnética sobre o rotor foram medidas diretamente no protótipo (ver apêndice A).

### B.2.1 Constante $K$

Do apêndice C, p. 97, tem-se esta definição:

$$K = \frac{2\mu_0 hr N^2}{\pi}$$

As constantes desta eq. são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \\ h = 0,102 \text{ m} \\ r = 0,0385 \text{ m} \\ N = 140 \text{ espiras por bobina do estator} \\ g_0 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{array} \right.$$

O que leva a:

$$K_{(calc)} \simeq 6,1575 \cdot 10^{-5}$$

Usando isto na eq. (C.83), p. 104, tem-se um valor teórico para a indutância própria das bobinas. Para isso, assume-se que o rotor está no centro, ou seja,  $\alpha = \beta = 0$ . Então:

$$L_{e(calc)} = \frac{1,851 K}{g_0} \simeq 0,16282 \text{ H}$$

Comparando este valor com aquele obtido através de medições ( $L_e = 0,112 \text{ H}$ ), observa-se uma pequena diferença, a qual pode ser explicada por erros de medição e devido a muitas simplificações no cálculo analítico. Confiando-se mais no resultado medido, pode-se acrescentar um fator de correção sobre a constante  $K$ , de modo que ela reflita um valor para as indutâncias próprias mais próximo do real:

$$K = K_{(calc)} \cdot \frac{L_e}{L_{e(calc)}} \simeq 4,2355 \cdot 10^{-5}$$

### B.2.2 Constantes $K_1$ e $K_2$

Estas constantes foram definidas no capítulo 4, p. 27 e 30. Com os valores de  $K$  e  $g_0$  definidos antes, tem-se:

$$K_1 = \frac{0,555 K}{2 g_0^2} \simeq 23,987$$

$$K_2 = \frac{K}{2 g_0^3} \simeq 6,1743 \cdot 10^5$$

### B.2.3 Constantes $K_3$ e $K_4$

Estas foram definidas na p. 33:

$$K_3 = \frac{12 K_1 I_m l_1 (l_1 + l_2)}{I_r}$$

$$K_4 = \frac{4,052 K_2 l_1^2 (I_m^2 + \overline{\Delta i_\beta}^2)}{I_r}$$

Os parâmetros a serem usados são:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_m = 0,664 \text{ A} \\ \overline{\Delta i_\beta}^2 = 0,299 \text{ A} \\ l_1 = 0,3105 \text{ m} \\ l_2 = 0,1085 \text{ m} \\ I_r = 0,495 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{array} \right.$$

As correntes foram obtidas experimentalmente, com o sistema já funcionando. Os outros valores vieram através de medições e cálculos mostrados no apêndice A.

O resultado aproximado é:

$$K_3 \simeq 50,234$$

$$K_4 \simeq 2,5840 \cdot 10^4$$

### B.2.4 Função de transferência dos sensores de posição

A variação máxima do rotor é dada pela folga entre o rolamento de segurança e o encaixe na tampa lateral da carcaça. Esta folga é tomada do projeto do protótipo como sendo igual a  $500 \mu\text{m}$ . Ajustou-se o ganho dos sensores de posição para que respondessem

com uma variação correspondente igual a 2 V. Assim, o ganho deles ficou fixado em:

$$K_{sp} \simeq \frac{2}{5 \cdot 10^{-4}} = 4000 \text{ V/m}$$

A frequência de corte é calculada a partir do circuito na saída do sensor, desenhado na figura 48.

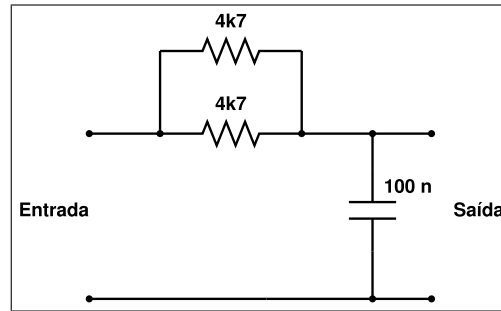


Figura 48: Filtro passa-baixa na saída dos sensores de posição

A resistência equivalente em série com o capacitor é:

$$R_{ec} = \frac{4,7}{2} \cdot 10^3 = 2350 \Omega$$

E a frequência de corte é o inverso da constante de tempo  $RC$ :

$$\omega_{sp} = \frac{1}{2350 \cdot 100 \cdot 10^{-9}} \simeq 4255 \text{ rad/s}$$

Portanto, a função de transferência fica assim:

$$H_p(s) \simeq \frac{4000}{\frac{s}{4255} + 1}$$

## Apêndice C – Cálculo da Matriz de Indutâncias

Neste apêndice estão desenvolvidos os cálculos mais complexos indicados no capítulo 3. Detalha-se a obtenção de funções analíticas que descrevem aproximadamente diversas características da estrutura do motor. Estas funções são necessárias à obtenção da matriz de indutâncias dos enrolamentos do estator, que por sua vez leva à expressão das forças magnéticas radiais atuantes sobre o rotor. Muitos dos símbolos matemáticos aqui apresentados já foram definidos no referido capítulo 3.

### C.1 Função espessura do entreferro

Por geometria analítica e com a ajuda da figura 49, determina-se aqui a função espessura do entreferro,  $g(\alpha, \beta, \theta)$ .

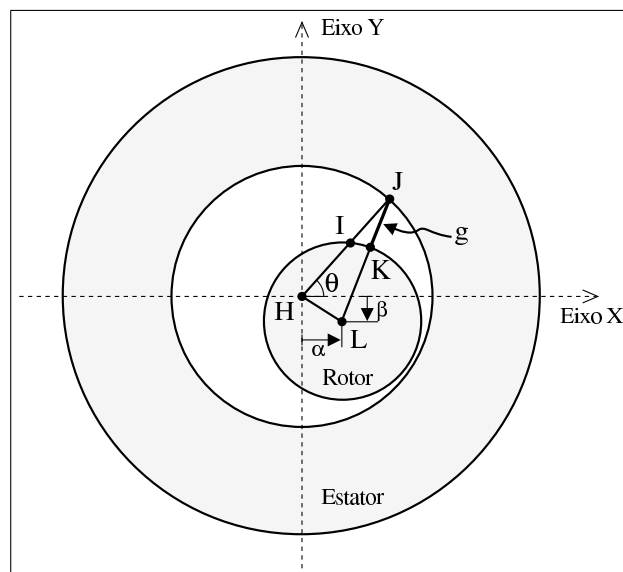


Figura 49: Diagrama para o cálculo de  $g(\alpha, \beta, \theta)$

Nessa figura, a dimensão do raio do rotor está exageradamente encolhida para facilitar a visualização das distâncias envolvidas. Define-se, então, a espessura do entreferro

$g(\alpha, \beta, \theta)$  como sendo a distância entre os pontos  $J$  e  $K$ . Como os raios do rotor e do estator são quase iguais, esta aproximação é válida. Para facilitar o desenvolvimento da função, a seguinte notação será utilizada:

$g = g(\alpha, \beta, \theta)$  é a função procurada;

$R_r = \|\overrightarrow{LK}\|$  é o raio do rotor;

$R_e = \|\overrightarrow{HJ}\|$  é o raio interno do estator;

$R_m = (R_r + R_e)/2$  é a média dos dois raios;

$g_0 = R_e - R_r = g(0, 0, \theta)$  é a espessura média do entreferro;

Desenvolvendo-se  $g$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 g &= \|\overrightarrow{LJ}\| - R_r \\
 &= \|(\overrightarrow{HJ}) - (\overrightarrow{HL})\| - R_r \\
 &= \|(R_e \cos \theta, R_e \sin \theta) - (\alpha, \beta)\| - R_r \\
 &= \|(R_e \cos \theta - \alpha, R_e \sin \theta - \beta)\| - R_r \\
 &= \sqrt{(R_e \cos \theta - \alpha)^2 + (R_e \sin \theta - \beta)^2} - R_r \\
 &= \sqrt{R_e^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2R_e(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)} - R_r \quad \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (g + R_r)^2 &= R_e^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2R_e(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) \\
 g^2 + 2gR_r + R_r^2 &= R_e^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2R_e(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) \\
 g^2 + 2gR_r &= (R_e^2 - R_r^2) + \alpha^2 + \beta^2 - 2R_e(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) \\
 g(g + 2R_r) &= (R_e + R_r)(R_e - R_r) + \alpha^2 + \beta^2 - 2R_e(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) \\
 g\left[g + 2\left(R_m - \frac{g_0}{2}\right)\right] &= (2R_m)(g_0) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\left(R_m + \frac{g_0}{2}\right)(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)
 \end{aligned}$$

Como  $g_0 \ll R_m$  :

$$g(g + 2R_m) \simeq (2R_m)(g_0) + \alpha^2 + \beta^2 - 2R_m(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)$$

E como  $g \ll R_m$  :

$$\begin{aligned}
 g(2R_m) &\simeq 2R_m g_0 + \alpha^2 + \beta^2 - 2R_m(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) \\
 g &\simeq g_0 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2R_m} - (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)
 \end{aligned}$$

E também,  $\frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2R_m} \ll g_0$  :

$$g(\alpha, \beta, \theta) \simeq g_0 - (\alpha \cos \theta + \beta \sen \theta) \quad (\text{C.1})$$

## C.2 Função corrente envolvida

Cabe agora relembrar exatamente as posições de cada bobina no estator, definidas pelos ângulos iniciais e finais das ranhuras que ocupam. Esta disposição está dada na figura 12, p. 16.

A função  $i_j(\theta)$  aparece na equação (3.10), p. 19. Ela é obtida observando-se também a figura 14, p. 18: o sinal de  $I_j$  deve estar de acordo com a “regra da mão direita” aplicada ao percurso mostrado nessa figura. Nas definições a seguir, qualquer ângulo é medido a partir do lado direito do eixo X. E além disso, os ângulos restringem-se ao intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

$$i_1(\theta) = \begin{cases} I_1 & \text{para } \{-\pi \leq \theta \leq -3\pi/12\} \\ 0 & \text{para } \{-3\pi/12 < \theta < 3\pi/12\} \\ I_1 & \text{para } \{3\pi/12 \leq \theta \leq \pi\} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

$$i_2(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{para } \{-\pi \leq \theta < \pi/12\} \\ -I_2 & \text{para } \{\pi/12 \leq \theta \leq 7\pi/12\} \\ 0 & \text{para } \{7\pi/12 < \theta \leq \pi\} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

$$i_3(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{para } \{-\pi \leq \theta < 5\pi/12\} \\ -I_3 & \text{para } \{5\pi/12 \leq \theta \leq 11\pi/12\} \\ 0 & \text{para } \{11\pi/12 < \theta \leq \pi\} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

$$i_4(\theta) = \begin{cases} -I_4 & \text{para } \{-\pi \leq \theta \leq -9\pi/12\} \\ 0 & \text{para } \{-9\pi/12 < \theta < 9\pi/12\} \\ -I_4 & \text{para } \{9\pi/12 \leq \theta \leq \pi\} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

$$i_5(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{para } \{-\pi \leq \theta < -11\pi/12\} \\ -I_5 & \text{para } \{-11\pi/12 \leq \theta \leq -5\pi/12\} \\ 0 & \text{para } \{-5\pi/12 < \theta \leq \pi\} \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

$$i_6(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{para } \{-\pi \leq \theta < -7\pi/12\} \\ -I_6 & \text{para } \{-7\pi/12 \leq \theta \leq -\pi/12\} \\ 0 & \text{para } \{-\pi/12 < \theta \leq \pi\} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

### C.3 Função potencial magnético escalar (fmm)

E agora, para completar a eq. (3.10) para o campo magnético, só falta calcular o potencial magnetostático  $V_j(\alpha, \beta)$ , através da Lei de Gauss, eq. (3.9). Para isso, utiliza-se a superfície que envolve o rotor, ou seja, interpreta-se que o fluxo total que sai do rotor é nulo. Como o fluxo está concentrado no entreferro, a integração sobre o topo e a base do cilindro deve ser zero. Por isso, só é necessário integrar sobre a área lateral do rotor:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} &= \mu_0 h r \int_{-\pi}^{\pi} H_j(\alpha, \beta, \theta) d\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_j(\alpha, \beta) - N i_j(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta = 0 \quad \rightarrow \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_j(\alpha, \beta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta - N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i_j(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta = 0 \quad \rightarrow \\ V_j(\alpha, \beta) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta - N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i_j(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta &= 0 \quad \rightarrow \\ V_j(\alpha, \beta) &= \frac{N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i_j(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta} \end{aligned}$$

Usando-se a equação (C.1), tem-se:

$$V_j(\alpha, \beta) = \frac{N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i_j(\theta)}{[g_0 - (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)]} d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{[g_0 - (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)]} d\theta} \quad (\text{C.8})$$

Para se escrever explicitamente a expressão de  $V_j(\alpha, \beta)$ , deve-se resolver a seguinte integral indefinida:

$$\Upsilon(\alpha, \beta, \theta) = \int \frac{1}{[g_0 - (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)]} d\theta$$

O resultado é uma função um pouco complexa, mas ainda tratável analiticamente:

$$\Upsilon(\alpha, \beta, \theta) = 2 \frac{\arctan \left( \frac{(g_0 + \alpha)(\sin \theta) - \beta(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \right)}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.9})$$

Para compactar mais as próximas equações, define-se aqui:

$$\xi(\alpha, \beta, \theta) = \arctan \left( \frac{(g_0 + \alpha)(\sin \theta) - \beta(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \right) \quad (\text{C.10})$$

Ou seja:

$$\Upsilon(\alpha, \beta, \theta) = 2 \frac{\xi(\alpha, \beta, \theta)}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.11})$$

Usando este resultado na eq. (C.8), fica-se com:

$$V_j(\alpha, \beta) = \frac{N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i_j(\theta)}{[g_0 - (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)]} d\theta}{\Upsilon(\alpha, \beta) \Big|_{-\pi}^{\pi}}$$

onde:

$$\begin{aligned} \Upsilon(\alpha, \beta, \theta) \Big|_{-\pi}^{\pi} &= \left[ \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \Upsilon(\alpha, \beta, \theta) \right] - \left[ \lim_{\theta \rightarrow -\pi^+} \Upsilon(\alpha, \beta, \theta) \right] \\ &= 2 \frac{\left[ \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \xi(\alpha, \beta, \theta) \right] - \left[ \lim_{\theta \rightarrow -\pi^+} \xi(\alpha, \beta, \theta) \right]}{\sqrt{g^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \\ &= 2 \frac{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{g^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \end{aligned}$$

Então:

$$V_j(\alpha, \beta) = \frac{N\sqrt{g^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i_j(\theta)}{[g_0 - (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)]} d\theta \quad (\text{C.12})$$

Para  $j = 1$ , usando a eq. (C.2), tem-se:

$$\begin{aligned} V_1(\alpha, \beta) &= \frac{N\sqrt{g^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{-3\pi/12} \frac{I_1}{[g_0 - (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)]} d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{3\pi/12}^{\pi} \frac{I_1}{[g_0 - (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)]} d\theta \right) \rightarrow \end{aligned}$$

$$V_1(\alpha, \beta) = \frac{NI_1 \sqrt{g^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}}{2\pi} \left( \Upsilon(\alpha, \beta, \theta) \Big|_{-\pi}^{-3\pi/12} + \Upsilon(\alpha, \beta, \theta) \Big|_{3\pi/12}^{\pi} \right) \rightarrow$$

$$V_1(\alpha, \beta) = \frac{NI_1 \sqrt{g^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}}{2\pi} \left( \frac{2 \xi(\alpha, \beta, \theta)}{\sqrt{g^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \Big|_{-\pi}^{-3\pi/12} + \frac{2 \xi(\alpha, \beta, \theta)}{\sqrt{g^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \Big|_{3\pi/12}^{\pi} \right) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} V_1(\alpha, \beta) &= \frac{NI_1}{\pi} \left[ \xi(\alpha, \beta, \theta) \Big|_{-\pi}^{-3\pi/12} + \xi(\alpha, \beta, \theta) \Big|_{3\pi/12}^{\pi} \right] \\ &= \frac{NI_1}{\pi} \left[ \xi(\alpha, \beta, \frac{-3\pi}{12}) - \xi(\alpha, \beta, -\pi) + \xi(\alpha, \beta, \pi) - \xi(\alpha, \beta, \frac{3\pi}{12}) \right] \\ &= \frac{NI_1}{\pi} \left[ \xi(\alpha, \beta, \frac{-3\pi}{12}) - \left( \frac{-\pi}{2} \right) + \left( \frac{\pi}{2} \right) - \xi(\alpha, \beta, \frac{3\pi}{12}) \right] \\ &= \frac{NI_1}{\pi} \left[ \xi(\alpha, \beta, \frac{-3\pi}{12}) - \xi(\alpha, \beta, \frac{3\pi}{12}) + \pi \right] \end{aligned}$$

E para melhorar a visualização das próximas equações, a seguinte notação é adotada:

$$E(\theta) = \xi(\alpha, \beta, \theta)$$

Deste modo:

$$V_1(\alpha, \beta) = \frac{NI_1}{\pi} \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \pi \right] \quad (\text{C.13})$$

Substituindo as equações de (C.3) a (C.7) em (C.12) e procedendo de modo análogo, obtém-se as funções  $V_j(\alpha, \beta)$  restantes, para  $j$  variando de 2 a 6.

$$V_2(\alpha, \beta) = \frac{NI_2}{\pi} \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \quad (\text{C.14})$$

$$V_3(\alpha, \beta) = \frac{NI_3}{\pi} \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right] \quad (\text{C.15})$$

$$V_4(\alpha, \beta) = \frac{NI_4}{\pi} \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - \pi \right] \quad (\text{C.16})$$

$$V_5(\alpha, \beta) = \frac{NI_5}{\pi} \left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) \right] \quad (\text{C.17})$$

$$V_6(\alpha, \beta) = \frac{NI_6}{\pi} \left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) \right] \quad (\text{C.18})$$

## C.4 Função campo magnético

Usando-se as equações (C.13) a (C.18) em (3.10), fica-se com:

$$H_1(\alpha, \beta, \theta) = \frac{\frac{NI_1}{\pi} \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \pi \right] - Ni_1(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} \quad (\text{C.19})$$

$$H_2(\alpha, \beta, \theta) = \frac{\frac{NI_2}{\pi} \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] - Ni_2(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} \quad (\text{C.20})$$

$$H_3(\alpha, \beta, \theta) = \frac{\frac{NI_3}{\pi} \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right] - Ni_3(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} \quad (\text{C.21})$$

$$H_4(\alpha, \beta, \theta) = \frac{\frac{NI_4}{\pi} \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - \pi \right] - Ni_4(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} \quad (\text{C.22})$$

$$H_5(\alpha, \beta, \theta) = \frac{\frac{NI_5}{\pi} \left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) \right] - Ni_5(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} \quad (\text{C.23})$$

$$H_6(\alpha, \beta, \theta) = \frac{\frac{NI_6}{\pi} \left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) \right] - Ni_6(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} \quad (\text{C.24})$$

## C.5 Função fluxo magnético concatenado

Retomando-se a eq. (3.7), vê-se o fluxo que atravessa cada bobina é composto por parcelas geradas pelas correntes nos seis enrolamentos. E a matriz de indutância  $\mathbf{L}$  tem 36 elementos, ou seja, são 36 parcelas a serem desenvolvidas. Elas estão organizadas a seguir, segundo as linhas de  $\mathbf{L}$ . O equacionamento detalhado será feito para dois casos. Para os outros, somente serão mostradas as equações resultantes.

### C.5.1 Fluxos próprios

$$\begin{aligned}
\phi_{11}(\alpha, \beta) &= \mu_0 h r \int_{a_1}^{b_1} H_1(\alpha, \beta, \theta) d\theta = \mu_0 h r \int_{-3\pi/12}^{3\pi/12} H_1(\alpha, \beta, \theta) d\theta \\
&= \mu_0 h r \int_{-3\pi/12}^{3\pi/12} \frac{\frac{NI_1}{\pi} \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \pi \right] - 0}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta \\
&= \mu_0 h r \frac{NI_1}{\pi} \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \pi \right] \int_{-3\pi/12}^{3\pi/12} \frac{1}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta \\
&= \mu_0 h r \frac{NI_1}{\pi} \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \pi \right] \Upsilon(\alpha, \beta, \theta) \Big|_{-3\pi/12}^{3\pi/12} \rightarrow \\
\phi_{11}(\alpha, \beta) &= \frac{2\mu_0 h r NI_1 \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.25)
\end{aligned}$$

Para  $i = j = 2$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
\phi_{22}(\alpha, \beta) &= \mu_0 h r \int_{\pi/12}^{7\pi/12} H_2(\alpha, \beta, \theta) d\theta \\
&= \mu_0 h r \int_{\pi/12}^{7\pi/12} \frac{\frac{NI_2}{\pi} \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] + NI_2}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta \\
&= \mu_0 h r \frac{NI_2}{\pi} \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \pi \right] \int_{\pi/12}^{7\pi/12} \frac{1}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta \\
&= \mu_0 h r \frac{NI_2}{\pi} \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \pi \right] \Upsilon(\alpha, \beta, \theta) \Big|_{\pi/12}^{7\pi/12} \rightarrow \\
\phi_{22}(\alpha, \beta) &= \frac{2\mu_0 h r NI_2 \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.26)
\end{aligned}$$

Assim como:

$$\phi_{33}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 h r NI_3 \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.27)$$

$$\phi_{44}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 h r NI_4 \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \pi \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.28)$$

$$\phi_{55}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 h r NI_5 \left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.29)$$

$$\phi_{66}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_6 \left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.30})$$

## C.5.2 Fluxos mútuos

### Parcelas na bobina 1

$$\begin{aligned} \phi_{12}(\alpha, \beta) &= \mu_0 hr \int_{-3\pi/12}^{3\pi/12} H_2(\alpha, \beta, \theta) d\theta \\ &= \mu_0 hr \int_{-3\pi/12}^{3\pi/12} \frac{\frac{NI_2}{\pi} \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] - NI_2(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta \\ &= \mu_0 hr \left\{ \int_{-3\pi/12}^{\pi/12} \frac{\frac{NI_2}{\pi} \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right]}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi/12}^{3\pi/12} \frac{\frac{NI_2}{\pi} \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] + NI_2(\theta)}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta \right\} \\ &= \frac{\mu_0 hr NI_2}{\pi} \left\{ \int_{-3\pi/12}^{\pi/12} \frac{\left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right]}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi/12}^{3\pi/12} \frac{\left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \pi \right]}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta \right\} \\ &= \frac{\mu_0 hr NI_2}{\pi} \left\{ \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \Upsilon(\alpha, \beta, \theta) \Big|_{-3\pi/12}^{\pi/12} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \pi \right] \Upsilon(\alpha, \beta, \theta) \Big|_{\pi/12}^{3\pi/12} \right\} \rightarrow \\ \phi_{12}(\alpha, \beta) &= \frac{2\mu_0 hr NI_2}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{\pi}{12}\right) \right] \right\} \quad (\text{C.31}) \end{aligned}$$

Para  $i = 1$  e  $j = 3$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_{13}(\alpha, \beta) &= \mu_0 hr \int_{-3\pi/12}^{3\pi/12} H_3(\alpha, \beta, \theta) d\theta \\ &= \mu_0 hr \int_{-3\pi/12}^{3\pi/12} \frac{\frac{NI_3}{\pi} \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right]}{g(\alpha, \beta, \theta)} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 hr NI_3}{\pi} \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right] \Upsilon(\alpha, \beta, \theta) \Big|_{-3\pi/12}^{3\pi/12} \rightarrow \\ \phi_{13}(\alpha, \beta) &= \frac{2\mu_0 hr NI_3 \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.32}) \end{aligned}$$

Assim como:

$$\phi_{14}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_4 \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - \pi \right] \left[ E\left(\frac{3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.33)$$

$$\phi_{15}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_5 \left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.34)$$

$$\begin{aligned} \phi_{16}(\alpha, \beta) = & \frac{2\mu_0 hr NI_6}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) \right] \right\} \quad (C.35) \end{aligned}$$

### Parcelas na bobina 2

$$\begin{aligned} \phi_{21}(\alpha, \beta) = & \frac{2\mu_0 hr NI_1}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{\pi}{12}\right) \right] \right\} \quad (C.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{23}(\alpha, \beta) = & \frac{2\mu_0 hr NI_3}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{\pi}{12}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right] \right\} \quad (C.37) \end{aligned}$$

$$\phi_{24}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_4 \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - \pi \right] \left[ E\left(\frac{7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.38)$$

$$\phi_{25}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_5 \left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.39)$$

$$\phi_{26}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_6 \left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.40)$$

### Parcelas na bobina 3

$$\phi_{31}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_1 \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.41)$$

$$\begin{aligned} \phi_{32}(\alpha, \beta) = & \frac{2\mu_0 hr NI_2}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right] \right\} \quad (C.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{34}(\alpha, \beta) = & \frac{2\mu_0 hr NI_4}{\pi\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - \pi \right] \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (C.43)$$

$$\phi_{35}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_5 \left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]}{\pi\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.44)$$

$$\phi_{36}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_6 \left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]}{\pi\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.45)$$

#### Parcelas na bobina 4

$$\phi_{41}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_1 \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \pi \right]}{\pi\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.46)$$

$$\phi_{42}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_2 \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \pi \right]}{\pi\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.47)$$

$$\begin{aligned} \phi_{43}(\alpha, \beta) = & \frac{2\mu_0 hr NI_3}{\pi\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \pi \right] + \right. \\ & \left. + \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (C.48)$$

$$\begin{aligned} \phi_{45}(\alpha, \beta) = & \frac{2\mu_0 hr NI_5}{\pi\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \pi \right] + \right. \\ & \left. + \left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (C.49)$$

$$\phi_{46}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_6 \left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \pi \right]}{\pi\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.50)$$

#### Parcelas na bobina 5

$$\phi_{51}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_1 \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right]}{\pi\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.51)$$

$$\phi_{52}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_2 \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right]}{\pi\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (C.52)$$

$$\phi_{53}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_3 \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.53})$$

$$\begin{aligned} \phi_{54}(\alpha, \beta) = & \frac{2\mu_0 hr NI_3}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - \pi \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) \right] \right\} \quad (\text{C.54}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{56}(\alpha, \beta) = & \frac{2\mu_0 hr NI_6}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right] \right\} \quad (\text{C.55}) \end{aligned}$$

### Parcelas na bobina 6

$$\begin{aligned} \phi_{61}(\alpha, \beta) = & \frac{2\mu_0 hr NI_1}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) \right] \right\} \quad (\text{C.56}) \end{aligned}$$

$$\phi_{62}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_2 \left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.57})$$

$$\phi_{63}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_3 \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.58})$$

$$\phi_{64}(\alpha, \beta) = \frac{2\mu_0 hr NI_4 \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - \pi \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right]}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.59})$$

$$\begin{aligned} \phi_{65}(\alpha, \beta) = & \frac{2\mu_0 hr NI_5}{\pi \sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \left\{ \left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right] \right\} \quad (\text{C.60}) \end{aligned}$$

Fazendo-se as devidas simplificações nas equações dos fluxos mútuos concatenados entre dois enrolamentos  $i$  e  $j$ , vê-se que:

$$\phi_{ij}(\alpha, \beta) = \phi_{ji}(\alpha, \beta) \quad \text{para quaisquer } i \neq j$$

E o mesmo valerá para os elementos da matriz  $\mathbf{L}(\alpha, \beta)$  :

$$L_{ij} = L_{ji} \quad \text{para quaisquer } i \neq j$$

Os resultados dessas simplificações são mostrados a seguir.

## C.6 Matriz de indutâncias

Para se escrever as expressões das indutâncias próprias e mútuas entre os seis enrolamentos, aplica-se a eq. (3.6) sobre as obtidas na seção anterior. Basta substituir nelas os termos  $I_j$  por  $N$ , já que:  $L_{ij} = \frac{N}{I_j} \Phi_{ij}$ . Percebe-se que todas ficarão com um termo constante em comum, a saber:

$$K = \frac{2\mu_0 hr N^2}{\pi} \quad (\text{C.61})$$

### C.6.1 Indutâncias próprias

Para as próximas equações, cabe relembrar que  $E(\theta) = \xi(\alpha, \beta, \theta)$ , definida na eq. (C.10), é uma função de três variáveis, mas as indutâncias  $L_{ij}$  são definidas somente pelas duas variáveis  $\alpha$  e  $\beta$ , que são os deslocamentos do rotor a partir de sua posição central sobre o eixo principal da máquina.

$$L_{11} = K \frac{\left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.62})$$

$$L_{22} = K \frac{\left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.63})$$

$$L_{33} = K \frac{\left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.64})$$

$$L_{44} = K \frac{\left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.65})$$

$$L_{55} = K \frac{\left[ E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.66})$$

$$L_{66} = K \frac{\left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) + \pi \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.67})$$

### C.6.2 Indutâncias mútuas

$$L_{12} = L_{21} = K \frac{\left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{\pi}{12}\right) \right] + \pi \left[ E\left(\frac{3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.68})$$

$$L_{13} = L_{31} = K \frac{\left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.69})$$

$$L_{14} = L_{41} = K \frac{\left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \pi \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.70})$$

$$L_{15} = L_{51} = K \frac{\left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.71})$$

$$L_{16} = L_{61} = K \frac{\left[ E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) - E\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right] + \pi \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-3\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.72})$$

$$L_{23} = L_{32} = K \frac{\left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{11\pi}{12}\right) - E\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right] + \pi \left[ E\left(\frac{7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.73})$$

$$L_{24} = L_{42} = K \frac{\left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \pi \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.74})$$

$$L_{25} = L_{52} = K \frac{\left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.75})$$

$$L_{26} = L_{62} = K \frac{\left[ E\left(\frac{\pi}{12}\right) - E\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.76})$$

$$L_{34} = L_{43} = K \frac{\left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) \right] + \pi \left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{9\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.77})$$

$$L_{35} = L_{53} = K \frac{\left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.78})$$

$$L_{36} = L_{63} = K \frac{\left[ E\left(\frac{5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.79})$$

$$L_{45} = L_{54} = K \frac{\left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right] + \pi \left[ E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.80})$$

$$L_{46} = L_{64} = K \frac{\left[ E\left(\frac{9\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-9\pi}{12}\right) - \pi \right] \left[ E\left(\frac{-\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.81})$$

$$L_{56} = L_{65} = K \frac{\left[ E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-\pi}{12}\right) \right] \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right] + \pi \left[ E\left(\frac{-5\pi}{12}\right) - E\left(\frac{-7\pi}{12}\right) \right]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (\text{C.82})$$

## C.7 Simplificação da matriz de indutâncias

Para se chegar à equação (3.5) é necessário obter as derivadas parciais da matriz  $\mathbf{L}$  em relação a  $\alpha$  e em relação a  $\beta$ . Pelas equações anteriores, percebe-se que o nível de complexidade aumentará muito continuando-se com o tratamento puramente analítico. Por isso, busca-se agora aplicar aproximações quadráticas ou lineares para cada termo de  $\mathbf{L}$ . A escolha é feita por inspeção visual dos gráficos de algumas das entradas mais representativas dessa matriz (ver figuras 50 a 55).

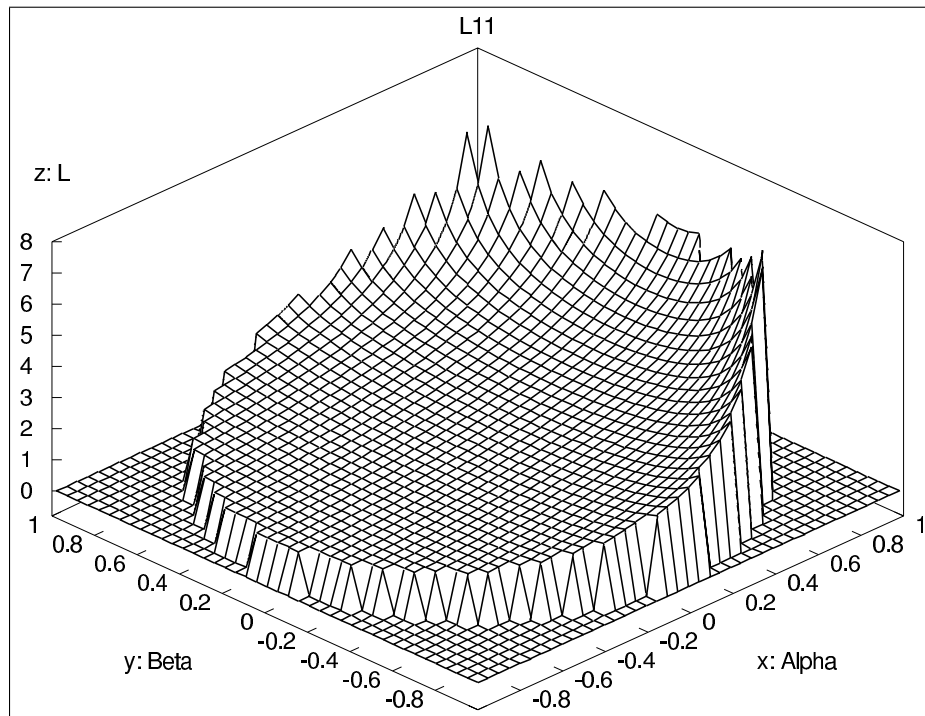


Figura 50: Indutância própria da bobina 1, em função do deslocamento do rotor

As equações (C.62) e (C.68) a (C.72) estão plotadas normalizando-se os termos constantes ( $K$  e  $g_0$ ). Essas funções referem-se à primeira linha da matriz  $\mathbf{L}$ . Pode-se mostrar que para as outras linhas o resultado difere somente pela rotação dos gráficos de acordo com a posição de cada bobina.

Os gráficos mostrados são de grande importância para se validar as equações obtidas até aqui, porque refletem fielmente o comportamento físico esperado. Para interpretá-

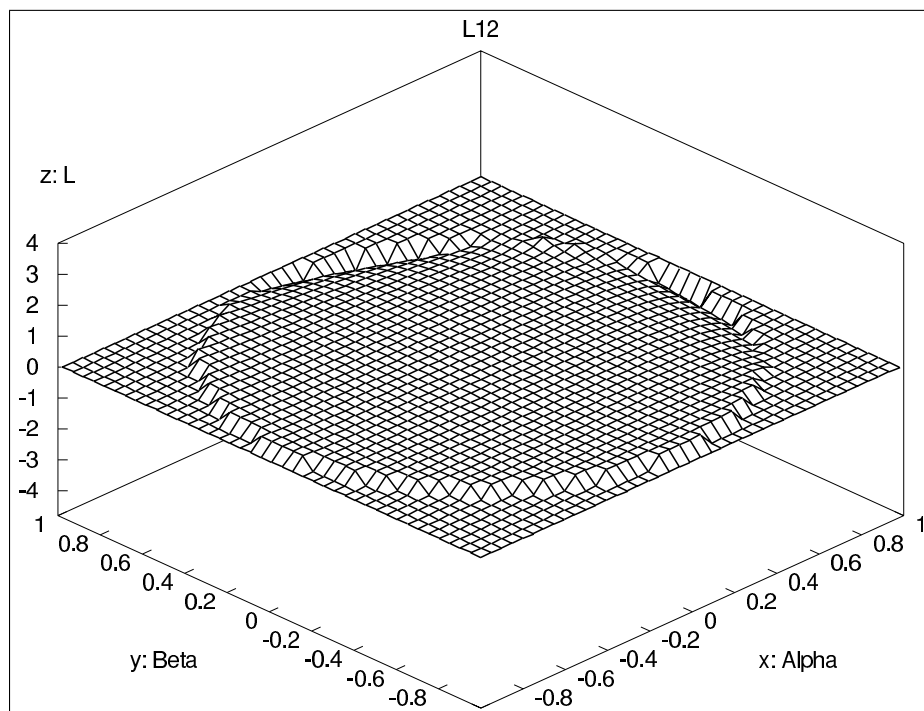


Figura 51: Indutância mútua entre as bobinas 1 e 2, em função do deslocamento do rotor

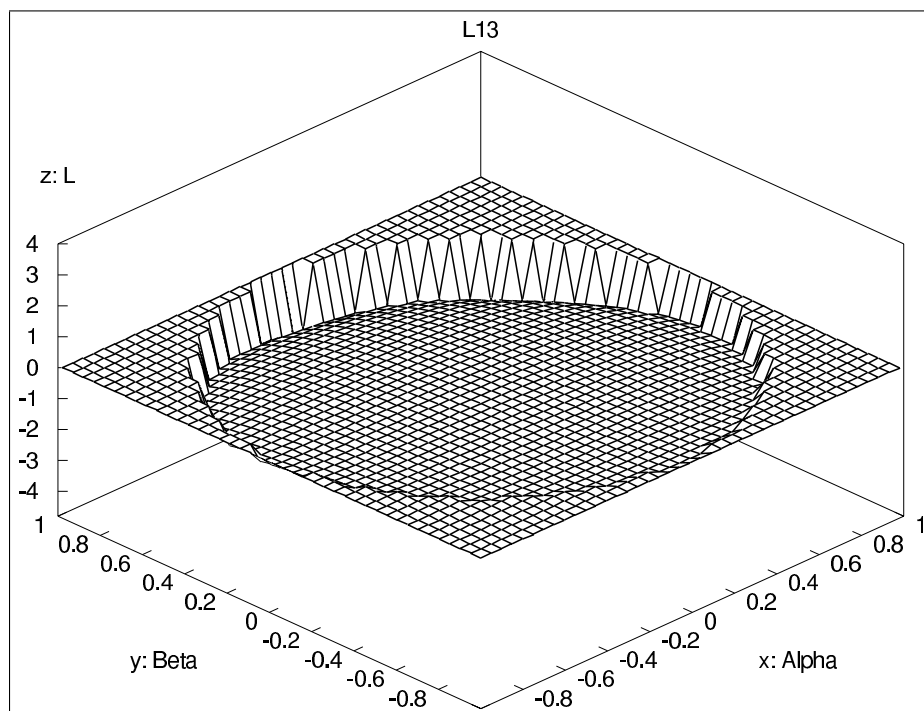


Figura 52: Indutância mútua entre as bobinas 1 e 3, em função do deslocamento do rotor

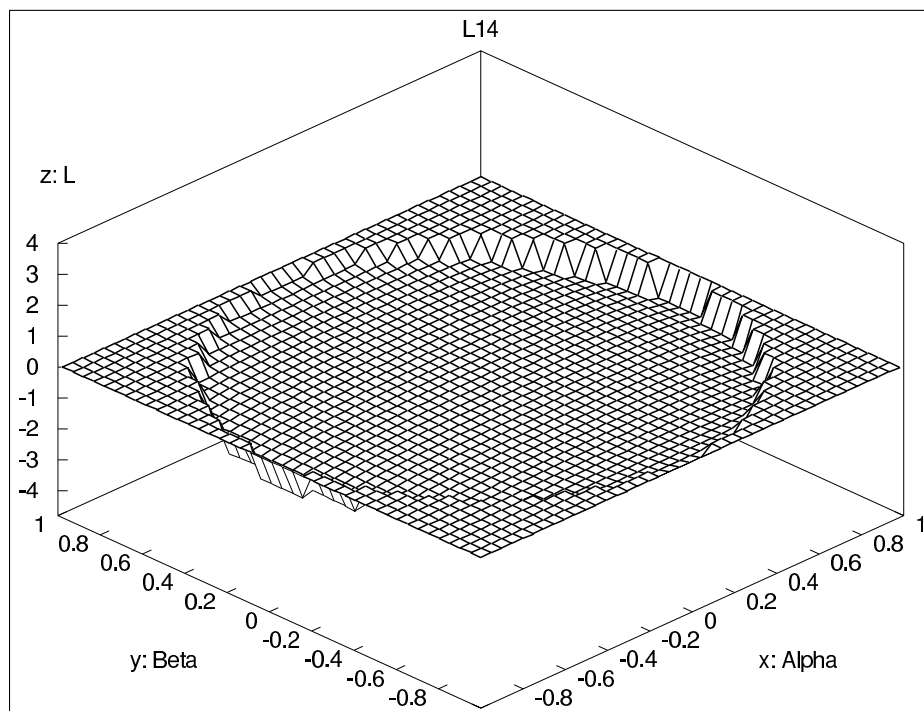


Figura 53: Indutância mútua entre as bobinas 1 e 4, em função do deslocamento do rotor

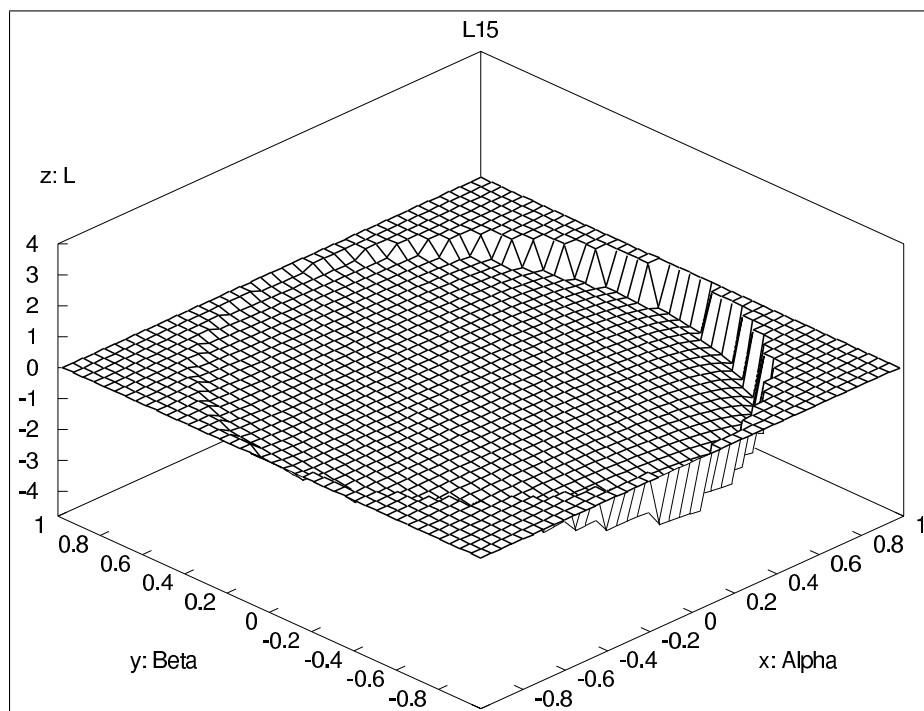


Figura 54: Indutância mútua entre as bobinas 1 e 5, em função do deslocamento do rotor

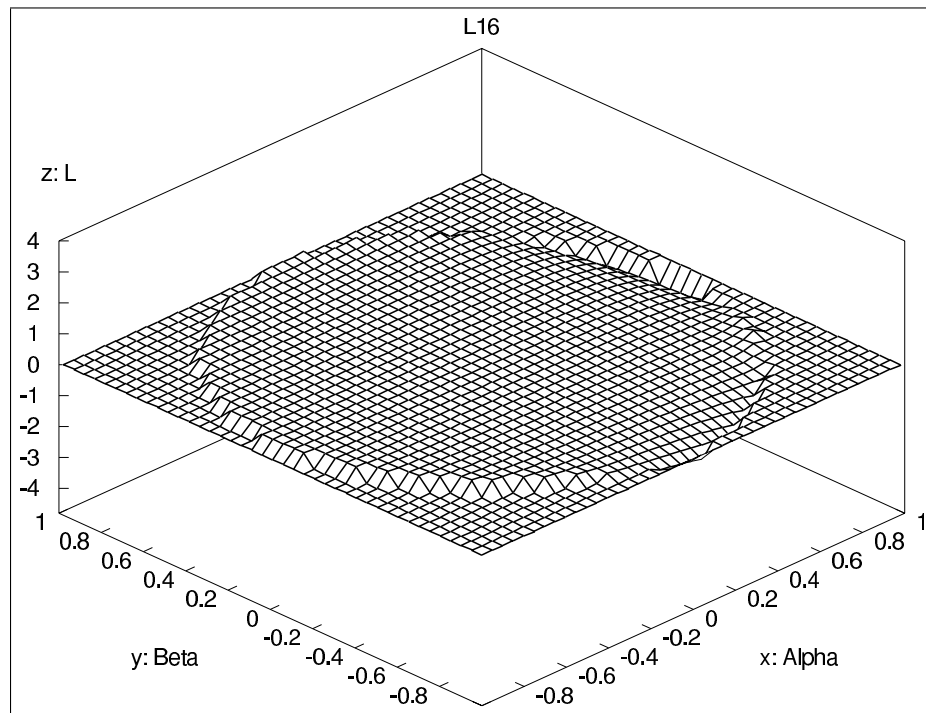


Figura 55: Indutância mútua entre as bobinas 1 e 6, em função do deslocamento do rotor

los, deve-se notar que as funções  $L_{ij}$  não têm sentido físico para deslocamentos do rotor maiores que  $g_0$ . Nos gráficos, os pontos referentes a deslocamentos do rotor maiores que 1 (pela normalização) foram forçados a zero. Desta maneira, pode-se comparar os resultados em relação ao nível do plano  $z = 0$ , que resulta desenhado nos pontos externos ao limite máximo.

As justificativas para as formas de cada superfície são:

- $L_{11}$ : A corrente que passa pela bobina 1 gera um fluxo magnético que entra no rotor através dela. Como o fluxo concatenado é o mesmo fluxo gerado, a indutância própria só pode assumir valores positivos. E, à medida que o rotor se aproxima desta bobina, a relutância do circuito magnético visto por ela diminui, fazendo sua indutância aumentar;
- $L_{12}$ : Parte do fluxo gerado pela bobina 1 e que é concatenado pela bobina 2 passa por ela entrando no rotor; e parte passa saindo. A razão disto pode ser vista pela disposição dos enrolamentos do estator na figura 12. Portanto, existe a possibilidade do fluxo concatenado ser negativo ou positivo. Este se torna negativo quando a maior parte do fluxo que passa pela bobina 2 estiver no sentido saindo do rotor. Esta situação deve ocorrer quando o rotor se aproxima mais da bobina 1 ou da bobina 2, pois a configuração do circuito magnético resultante disso facilita a

passagem de grande quantidade de fluxo através da bobina 2 no sentido “rotor → estator”;

- $L_{13}$ : Todo o fluxo concatenado pela bobina 3 passa no sentido “rotor → estator”. Por isso a indutância mútua entre esta bobina e a primeira é sempre negativa. E o acoplamento se torna maior quando o rotor se aproxima do ponto mais externo situado entre as duas bobinas, que é a configuração de menor relutância para o circuito magnético das linhas de fluxo que enlaçam estes dois enrolamentos;
- $L_{14}$ : Assim como no caso  $L_{13}$ , todo o fluxo concatenado pela bobina 4 passa por ela no sentido saindo do rotor: a indutância mútua é sempre negativa. Mas aqui, pela simetria oposta das bobinas 4 e 1, o acoplamento entre elas mantém-se aproximadamente constante para qualquer deslocamento do rotor.
- $L_{15}$ : Este caso é análogo ao caso  $L_{13}$ . Só o que muda é o eixo de simetria da superfície, agora alinhado em outra direção.
- $L_{16}$ : Este caso é análogo ao caso  $L_{12}$ . Só muda o eixo de simetria.

Percebe-se uma forte não linearidade para a indutância própria (gráfico  $L_{11}$ ). Por isso, as indutâncias próprias são aproximadas através de funções quadráticas. As indutâncias mútuas, entretanto, poderão ser aproximadas razoavelmente bem através de funções lineares. As aproximações são feitas em torno do ponto central, onde  $\alpha = \beta = 0$ . Trunca-se a série de Maclaurin nos termos de segunda ordem:

$$f(x, y) \simeq f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2 \quad \rightarrow$$

$$L_{ii} \simeq L_{ii}(0, 0) + \left( \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\beta=0} \right) \alpha + \left( \frac{\partial L_{ii}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=\beta=0} \right) \beta + \left( \frac{\partial^2 L_{ii}}{\partial \alpha \partial \beta} \Big|_{\alpha=\beta=0} \right) \alpha \beta + \\ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_{ii}}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=\beta=0} \right) \alpha^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_{ii}}{\partial \beta^2} \Big|_{\alpha=\beta=0} \right) \beta^2$$

As equações que descrevem as indutâncias próprias são da seguinte forma:

$$L_{ii} = K \frac{[E(a_i) - E(b_i) + \pi][E(b_i) - E(a_i)]}{\sqrt{g_0^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}}$$

As derivadas destas funções são bastante extensas, já que  $E(\theta)$  (eq. (C.10), p. 89) também é função de  $\alpha$  e  $\beta$ . Não há utilidade em se mostrar o cálculo destas derivadas, pois aqui fica evidente sua complexidade. E as derivadas secundárias geram funções mais extensas ainda. Suas obtenções devem ser automatizadas pelo uso de programas de

computador para tratamento simbólico de sistemas algébricos<sup>1</sup>. Para não estender muito mais este desenvolvimento, os resultados estão escritos diretamente a seguir.

$$\mathbf{L}(\alpha, \beta) \simeq \frac{K}{g_0} \left( \mathbf{L}_0 + \frac{\mathbf{L}_\alpha}{g_0} \alpha + \frac{\mathbf{L}_\beta}{g_0} \beta + \frac{\mathbf{L}_{\alpha\beta}}{g_0^2} \alpha\beta + \frac{\mathbf{L}_{\alpha\alpha}}{2g_0^2} \alpha^2 + \frac{\mathbf{L}_{\beta\beta}}{2g_0^2} \beta^2 \right) \quad (\text{C.83})$$

onde:

$$\mathbf{L}_0 \simeq \begin{bmatrix} 1,851 & 0,206 & -0,617 & -0,617 & -0,617 & 0,206 \\ 0,206 & 1,851 & 0,206 & -0,617 & -0,617 & -0,617 \\ -0,617 & 0,206 & 1,851 & 0,206 & -0,617 & -0,617 \\ -0,617 & -0,617 & 0,206 & 1,851 & 0,206 & -0,617 \\ -0,617 & -0,617 & -0,617 & 0,206 & 1,851 & 0,206 \\ 0,206 & -0,617 & -0,617 & -0,617 & 0,206 & 1,851 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_\alpha \simeq 0,555 \begin{bmatrix} 2 & -0,232 & -0,5 & 0 & -0,5 & -0,232 \\ -0,232 & 1 & 0 & 0,5 & 0 & -1 \\ -0,5 & 0 & -1 & 0,232 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,232 & -2 & 0,232 & 0,5 \\ -0,5 & 0 & 1 & 0,232 & -1 & 0 \\ -0,232 & -1 & 0 & 0,5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_\beta \simeq 0,555 \begin{bmatrix} 0 & -0,134 & -0,866 & 0 & 0,866 & 0,134 \\ -0,134 & 1,732 & -0,268 & -0,866 & 0 & 0 \\ -0,866 & -0,268 & 1,732 & -0,134 & 0 & 0 \\ 0 & -0,866 & -0,134 & 0 & 0,134 & 0,866 \\ 0,866 & 0 & 0 & 0,134 & -1,732 & 0,268 \\ 0,134 & 0 & 0 & 0,866 & 0,268 & -1,732 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{\alpha\beta} \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,247 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,247 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,247 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,247 \end{bmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Por ex.: Schelter (1998)

$$\mathbf{L}_{\alpha\alpha} \simeq \begin{bmatrix} 1,636 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,208 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,208 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,636 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,208 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,208 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{\beta\beta} \simeq \begin{bmatrix} 1,065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,493 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,493 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,065 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,493 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,493 \end{bmatrix}$$

Agora, esta equação é facilmente derivável em relação às variáveis  $\alpha$  e  $\beta$ . Suas derivadas parciais são substituídas na eq. (3.5) para a expressão da força magnética radial no rotor.